PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1918. Redaktionsschluß für No. 6 am 20. Februar 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Josef Popper-Lynkeus. Zu seinem achtzigsten Geburtstag. Von Ph. Frank. S. 57.

Originalmitteilungen:

E. Budde, Über Schwebungen. (Antwort an Herrn Waetzmann.) S. 60.

F. Jung, Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen. S. 61.

R. Glocker, Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen. S. 66.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

O. Lehmann, Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen. (I. Teil.) S. 73.

Berichtigung. S. 80.

Tagesereignisse. S. 80.

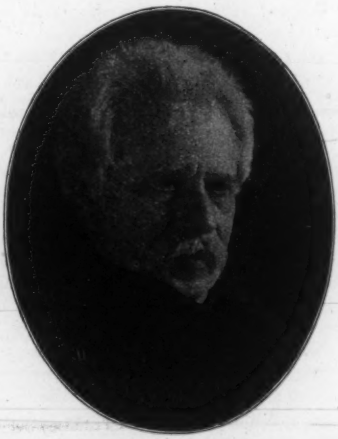
Personalien. S. 80.

Angebote. S. 80.

Josef Popper-Lynkeus.

Zu seinem achtzigsten Geburtstag.

In seiner im Jahre 1872 erschienenen Schrift „Die Geschichte und Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit", in der E. Mach zuerst seine Ideen über eine rein phänomenologische und daher relativistische Physik entwickelte, sagt er: „Ich habe nur einen Mann, Herrn Josef Popper, kennen gelernt, mit dem ich die hier dargelegten Ansichten, ohne Anstoß zu erregen, besprechen konnte. Ja, Herr Popper und ich sind unabhängig voneinander in bezug auf mehrere Punkte der Physik zu ähnlichen Ansichten gelangt".



Josef Popper wurde am 21. Februar 1838 zu Kolin in Böhmen geboren. Er besuchte 1854 bis 1857 das Polytechnikum in Prag, 1858 bis 1859 das Polytechnikum in Wien. Da er nach Vollendung seiner technischen Studien keine Anstellung als Ingenieur finden konnte, nahm er 1866 in Wien einen Hofmeisterposten an, nachdem er einige Zeit kommerzieller Beamter der Staatsbahn und einige Zeit Herausgeber einer Zeitungskorrespondenz gewesen war. Seine freie Zeit benutzte er aber, um in den Jahren 1858—1865 an der Universität Wien Vorlesungen über Mathematik und Physik zu hören. Er besuchte die Vorlesungen von Petzval, Ettingshausen, Littrow und Reitlinger. Durch diesen lernte er Ernst Mach kennen, mit dem ihn bis zu dessen Tode enge Freundschaft verband.

Da Popper eine Anstellung, die ihm gestattet hätte, ganz der Wissenschaft zu leben, nicht finden konnte, suchte er sich dadurch unabhängig zu machen, daß er seine technischen Kenntnisse zu Erfindungen benutzte, die sich praktisch verwerten ließen; auf dem Gebiete der Dampfmaschinentechnik rühren von ihm die Popperschen Kesseleinlagen und der Poppersche Luftkondensator her. Seit dem Jahre 1897 hat er jede praktische technische Tätigkeit aufgegeben und lebt in Wien ausschließlich seinem wissenschaftlichen und literarischen Wirken.

Für Popper als Physiker war der entscheidende Moment die Bekanntschaft mit den Ideen Robert Mayers. Unter dem unmittelbaren Eindrucke dieser Ideen von der Umwandelbarkeit aller Naturkräfte ineinander faßte er den Gedanken, Naturkräfte, wie z. B. Wasserfälle, die fern von menschlichen Wohnstätten vorkommen, dadurch nutzbar zu machen, daß man sie zum Betrieb einer magnetelektrischen Maschine verwendet und den so erzeugten Strom zu den Verwendungsorten hinleitet, ein Gedanke, den Popper schon im Jahre 1862 in einem versiegelten Schrei-

ben [1]) der Akademie der Wissenschaften in Wien mitteilte, und der später unabhängig von ihm die Grundlage der elektrischen Kraftübertragung wurde.

Nach der Belagerung von Paris 1871 herrschte ein allgemeines Interesse für den Luftballon. Poppers energetisch gerichtetem Denken mußte die Frage naheliegen, woher denn die Energie komme, die Lasten in so große Höhen hebt. Diese Frage bildet den Ausgangspunkt für die Abhandlung: „Über die Quelle und den Betrag der durch Luftballons geleisteten Arbeit“[2]). Sie enthält eine vollkommene Analyse des Energieumsatzes beim unendlich langsamen Steigen eines Ballons. Am Schlusse wird der Warmluftballon als thermodynamische Maschine zum Heben von Lasten diskutiert und gefunden, daß sein Nutzeffekt nur der hundertste Teil von dem der damals üblichen Dampfpumpen wäre. Diese Abhandlung war der Anlaß zu dem interessanten Briefwechsel Poppers mit Robert Mayer[3]). Als dessen „Mechanik der Wärme“ 1874 in zweiter Auflage erschien, ersuchte er Popper, eine Besprechung dieses Werkes zu schreiben. Diese Besprechung[4]) ist nicht ein bloßes Referat, sondern benutzt Mayers Auffassung der Physik als Ausgangspunkt, um eigene Anschauungen zu entwickeln. Popper stellt die phänomenologische Grundlegung der Physik mit einer Schärfe und frischen Originalität dar, die den besten Stellen in Machs Schriften durchaus gleichkommt. Wenn wir diesen Aufsatz lesen, sehen wir so recht, wie unzutreffend die jetzt oft geäußerte Ansicht ist, die heutige Physik sei eine entschiedene Abwendung von den phänomenologisch-energetischen Lehren. Die so reden, vergessen erstens, daß unsere heutige so freie Hypothesenbildung nur deshalb ohne Schaden möglich ist, weil uns die phänomenologische Auffassung immer eine sichere Rückzugsstellung darbietet und zweitens, daß die ganze relativistische Auffassung, die für die Physik unserer Zeit so kennzeichnend ist, geradezu eine folgerichtige Durchführung der phänomenalistischen Forderungen ist.

Wir sehen diesen Zusammenhang sehr schön, wenn wir z. B. lesen, was Popper über den Wärmetod der Welt als angebliche Folgerung aus dem Entropiesatz sagt:

„Zeit ist nichts anderes als die Anzahl von Perioden gewisser Naturvorgänge . . . es ist also ganz willkürlich, die eine Unendlichkeit, nämlich die Zeit, so anzusehen, als ob sie der anderen Unendlichkeit, dem Vorrat an mechanischer Kraft, gegenüber selbst wieder ein Unendliches höherer Potenz, also relativ unerschöpflich wäre.“

Im Jahre 1884 veröffentlichte Popper die „physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung“[1]). Er gibt darin eine Einführung in die Grundlehren der damaligen Elektrotechnik vom Standpunkte der allgemeinen Energielehre. Es werden die Analogien zwischen den verschiedenen Energiearten aufgesucht und besonders hervorgehoben, daß wie die Arbeit beim Heben eines Gewichts das Produkt aus Masse und Niveaudifferenz ist, jede Energie sich als Produkt zweier Faktoren ausdrücken läßt, von denen einer den Charakter einer Menge, der andre den einer Niveaudifferenz hat; so ist die Wärmeenergie das Produkt aus Wärmekapazität und Temperaturdifferenz usw. Dieser Gedanke spielte bekanntlich später in der Helm-Ostwaldschen Energetik eine große Rolle, wo die beiden Faktoren die Namen Kapazitäts- und Intensitätsfaktor bekommen.

Eine Anwendung der energetischen Denkweise auf ein chemisches Problem macht Popper in der Arbeit „Über die Vorausberechnung der Verbrennungs- oder Bildungswärme für Knallgas und andere Gasgemenge“[2]).

Außer diesen physikalischen Arbeiten veröffentlichte Popper zahlreiche Abhandlungen über Fragen der Dampfmaschinentechnik, Elektrotechnik und Flugtechnik. Auf dem letzteren Gebiet nahm er eine führende Stellung in der österreichischen flugtechnischen Schule ein, deren theoretische Arbeiten der eigentlichen praktischen Lösung des Flugproblems vorangingen. Seine Schrift: „Der Maschinen- und Vogelflug. Eine historisch-kritische flugtechnische

1) Wieder abgedruckt in Poppers Selbstbiographie. (J. Popper-Lynkeus, Selbstbiographie, Leipzig 1917.)

2) Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien (1875).

3) Die drei Briefe Mayers sind im Anhang zu Poppers Selbstbiographie abgedruckt.

4) „Ausland“ 1876, wieder abgedruckt in der Selbstbiographie.

1) Wien, bei A. Hartleben.

2) Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien (1889).

Untersuchung“ [1]) ist durch ihre begriffliche Klarheit auch für den Physiker sehr lesenswert.

Obwohl Popper eigentlich Techniker ist, so hat er doch von dem Einfluß der technischen Erfindungen auf die menschliche Gesittung niemals sehr hoch gedacht. Davon zeugt seine Schrift: „Die technischen Fortschritte nach ihrer ästhetischen und kulturellen Bedeutung“ [2]). Für ihn standen in der Wissenschaft immer die großen geistigen Konzeptionen am höchsten.

Und wenn die Gegner der phänomenalistischen Physik ihr vorwerfen, sie wolle die Wissenschaft zu einer bloßen Registrierung von Versuchsergebnissen herabdrücken, so braucht man zur Widerlegung nur anzuführen, was ein so entschiedener Vertreter des Phänomenalismus wie Popper sagt, um die Leistung Robert Mayers gegenüber Joule hervorzuheben, ein Verhältnis, das er mit dem eines Newton zum direkten Nachweis der Anziehungskraft durch Cavendish vergleicht: „In Beziehung auf Beherrschung der Natur verschwindet eben oft selbst die interessanteste physikalische Tatsache vor dem, auch nur hypothetischen oder indirekt erwiesenen fruchtbaren Grundgedanken und die bloße Kenntnis neuer Tatsachen trägt in solchen Fällen der geistigen Konzeption gegenüber nur einen wissenschaftlich-plebejischen Charakter“.

Auch auf dem Gebiete der reinen Mathematik war Popper tätig. Er veröffentlichte: „Über die Auffindung der Schwerpunkte mit Zirkel und Lineal“ [3]). „Beiträge zu Weddles Methode der Auflösung numerischer Gleichungen“ [4]). „Theorie der Konvergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Funktionen enthalten“ [5]).

Die Beschäftigung mit den exakten Wissenschaften und deren Anwendung bildet aber nur einen Teil der Wirksamkeit Poppers. Es sind seine sozialphilosophischen Schriften, die immer wachsende Bedeutung gewinnen. Heute, wo durch die Kriegswirtschaft der letzten Jahre der Gedanke immer mehr durchdringt, daß die staatliche Gemeinschaft die Pflicht habe, für die Existenzmöglichkeit jedes ihrer Bürger unmittelbar zu sorgen, werden die Lehren und Forderungen Poppers [1]) besser als je gewürdigt werden. In diesen Schriften herrscht überall eine phrasenlose Schlichtheit und Klarheit der Argumentation, die deutlich den an den exakten Wissenschaften gebildeten Geist verrät. Denn nicht dadurch wird in derartigen Erörterungen die Exaktheit der mathematischen Naturwissenschaft erreicht, daß man, wie manche Soziologen und Nationalökonomen es tun, die Worte soziale Statik und Dynamik u. ä. reichlich verwendet oder daß man Differentialgleichungen einführt, sondern dadurch, daß man wie Popper nur mit einfachen und durchsichtigen Begriffen arbeitet.

Selbst in dem einzigen dichterischen Werk Poppers, den unter dem Pseudonym Lynkeus erschienenen [2]) „Phantasien eines Realisten“ verleugnet sich jene eigentümliche leuchtende Klarheit nicht. Und nichts ist ergreifender, als zu lesen, wie in diesen kleinen Skizzen die menschlichen Leidenschaften von einem Dichter, dessen Menschenliebe keine Grenzen kennt, dennoch mit der kühlen Sachlichkeit des Forschers dargestellt werden.

Das Lebenswerk Poppers ist uns eine Bürgschaft dafür, daß der an den exakten Wissenschaften geschulte Geist, so wie er in der Zeit Galileis den Kampf gegen die mittelalterliche Scholastik eröffnete, wie er im Zeitalter der Aufklärung ihn siegreich zu Ende führte, auch heute noch führend ist in dem Ringen der Menschheit um höhere Lebensformen.

1) Berlin 1911, bei M. Krayn.
2) Dresden 1886, bei C. Reißner.
3) Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1860.
4) Sitzungsber. d. k. böhm. Akad. d. Wiss. Prag 1861.
5) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1865.

1) Das Recht zu leben und die Pflicht zu sterben, 3. Aufl. Dresden 1903 bei C. Reißner. Das Individuum und die Bewertung menschlicher Existenzen (unter dem Pseudonym Lynkeus). Dresden 1910. Die allgemeine Nährpflicht als Lösung der sozialen Frage. Dresden 1912.
2) Dresden 1899, bei C. Reißner, 12. Aufl. 1909.

Philipp Frank.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Schwebungen.

(Antwort an Herrn Waetzmann.)

Von E. Budde.

In seiner neuesten Abhandlung[1]) ist Waetzmann auf die Theorie der Schwebungen zurückgekommen. Er stellt nach wie vor in Abrede, daß man berechtigt sei, die Schwebungswirkung zweier Töne von den Schwingungszahlen p und q ($p > q$) durch die Gleichung

$$x = 2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

in bekannter Weise darzustellen. Die Frage läßt sich jetzt, wie ich glaube, soweit klarlegen, daß es gerechtfertigt sein mag, die Meinungsverschiedenheit vor der Öffentlichkeit zum Austrag zu bringen; kleinere vielleicht vorhanden gewesene Mißverständnisse mögen dabei unberücksichtigt bleiben. Die Leser, welche Interesse an der Sache nehmen, seien außer der eben zitierten Waetzmannschen Arbeit auf meine frühere Abhandlung[2]) verwiesen. Ich beschränke mich hier auf den Fall, daß die in Rede stehenden Töne p und q gleiche Amplitude haben; die Übertragung auf Amplituden von mäßiger Ungleichheit liegt auf der Hand.

Eins der Argumente von Waetzmann möchte ich ganz ausscheiden sehen. Das ist der Satz, den er nunmehr ausspricht in der Fassung:

> daß ein „Ton", dessen Amplitude ein Cosinus oder eine andere periodische Funktion der Zeit ist, eben kein Ton ist, und daß zur Beantwortung der Frage, welche Töne da sind, das Produkt [auf der rechten Seite von Gl. (1)] in Summen zerlegt werden muß.

Man denke sich irgendwo einen stationären Ton, etwa ein a, erzeugt. Man kann die Amplitude der zum Ohr gelangenden Schwingungen mit allbekannten Mitteln innerhalb ziemlich weiter Grenzen beliebig variieren, kann sie auch, etwa mit Hilfe von ausziehbaren Interferenzröhren, mit der Genauigkeit, die das Experiment überhaupt gestattet, periodisch mit sehr langer Periode (z. B. etwa 1 Sekunde) gestalten. Es glaubt wohl niemand, daß der Hörer in solchem Falle etwas anderes vernehmen würde als einen Ton a von periodisch veränderlicher Intensität. Ich vermute auch, daß Herr Waetzmann diesem Satze zustimmen wird; und er kann das, ohne seiner Auffassung etwas zu vergeben; denn es kommt für die Kontroverse nicht darauf an, ob man überhaupt einen Ton von veränderlicher Amplitude hören kann, sondern darauf, ob das in Frage stehende Produkt der Gl. (1) dann noch als Ton $\frac{p+q}{2}$ aufzufassen ist, wenn es aus dem Zusammenklang zweier einfachen Töne p und q hervorgeht. Das ist der Kernpunkt des Streites.

Bezüglich dessen stehe ich nun, wie vermutlich alle, die sich mit dem Gegenstand befassen, ganz auf dem von Waetzmann vertretenen Standpunkt des Ohmschen Prinzips: Wir hören einen einfachen Ton, wenn das Ohr von einer (hinreichend großen) Zahl von Wellen getroffen wird, die mit hinreichender Annäherung als reine Sinusschwingungen angesprochen werden können. Ich setze die Worte „mit hinreichender Annäherung" mit Bedacht zu; denn absolute Regelmäßigkeit zeigt ja kein technischer Vorgang; die Abweichung von der genauen Sinusschwingung darf nur über gewisse auf der Hand liegende Grenzen nicht hinausgehen.

Nun habe ich behauptet und behaupte noch, daß der Faktor $\sin \frac{p+q}{2} t$ als einfacher Ton $\frac{p+q}{2}$ gehört wird, wenn $p - q$ „sehr klein" ist. Ich habe diesen Fall ausdrücklich als Grenzfall bezeichnet und dabei den Vorbehalt gemacht, daß das Ohr, um nach Gl. (1) zu perzipieren, Zeit haben muß, die veränderliche Intensität als solche mehr oder weniger bequem zu erfassen. Waetzmann dagegen berechnet und weist mit Hilfe von Schwingungskurven nach, daß der Ton $\frac{p+q}{2}$ nicht hörbar werden kann, wenn es sich um Intervalle $\frac{p}{q}$ von der Ordnung 5/4 oder 7/5 handelt. Dem stimme ich vollständig zu; aber Intervalle von einer großen Terz und darüber sind im Sinne meiner (und der Starkeschen) Ausführungen nicht „sehr klein", sondern „groß, fast sehr groß". Selbstverständlich bedeutet der Satz „$p - q$ ist klein" nichts anderes als „$p - q$ ist klein gegen q". Wie im allgemeinen, so kann man auch in unserem Falle die Grenze zwischen groß und klein nicht ohne Willkür ziehen. Aber die sinnliche Wahrnehmung gibt hier doch einen recht brauchbaren Anhalt. Das Intervall, welches in meinem Sinne als sehr klein zu gelten hat, läßt sich auf zweierlei Weise charakterisieren:

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **18**, 560, 1917.
2) E. Budde, diese Zeitschr. **18**, 285, 1917.

1. Stellt man die Bewegung eines Punktes, an dem die beiden Schwingungen p und q zusammenwirken, graphisch dar, so erscheint sie dem Auge unter dem allbekannten Bilde einer regelmäßig an- und abschwellenden Sinuskurve. Derartige Bilder sind dem Leser wohl aus allen Lehrbüchern bekannt; eine rohe Wiedergabe findet sich als einzige Figur in meiner zitierten Abhandlung, eine bessere in Waetzmanns Lehrbuch[1]). 2. Nimmt man die Doppelschwingung mit dem Ohr wahr, so präsentiert sie sich wesentlich als ein an- und abschwellender Ton. Dabei ist noch zulässig — und es entspricht den Verhältnissen, die sich bei näherer Betrachtung ergeben —, daß dieser Ton geringe periodische Höhenänderungen aufweist, die, wenn auch nicht allen, so doch manchen Beobachtern zum Bewußtsein kommen. Der Hörer muß dabei, wie oben gesagt, Zeit haben, das An- und Abschwellen der Tonintensität mehr oder weniger bequem zu verfolgen. Von dem Augenblick an aber, wo man deutlich zwei getrennte Töne p und q hört, ist das Intervall $\frac{p}{q}$ nicht mehr „sehr klein". Für die große Mehrzahl der Menschen ist das sicherlich der Fall, wenn es sich um ein Interyall handelt, das etwa ein Viertel eines ganzen Tones beträgt; die Intervalle, für welche ich Gl. (1) als ausreichende Darstellung der Schwebungen in Anspruch nehme, liegen also etwa zwischen 1 und 31/30. Man kann bekanntlich mit zwei Stimmgabeln aus der großen Oktave ohne jede Schwierigkeit Schwebungen von zwei Sekunden Dauer hörbar machen. Dann hat man es mit Intervallen etwa von der Ordnung $\frac{201}{200}$ zu tun. Und da bedarf es wohl keiner eingehenden Rechnung, um die Behauptung zu stützen: Die Einzelschwingungen, aus denen sich eine Schwebungsperiode zusammensetzt, weichen von einer regelmäßigen Sinusschwingung der Periode $\frac{1}{200{,}5}$ so wenig ab, daß das Ohr den ganzen Wellenzug von einer Schwächungszeit zur anderen als einen erst an-, dann abschwellenden Ton wahrnimmt. Man vergleiche damit auch die Regelmäßigkeit der oben zitierten Kurve für $\frac{81}{80}$ in Waetzmanns Lehrbuch.

Die hier angegebenen Grenzen, innerhalb deren ich die Gl. (1) für die Darstellung des Schwebungsphänomens in Anspruch nehme, sind so bescheiden, daß ich glaube, auch Herr Waetzmann kann mir innerhalb derselben zustimmen. Wie mein im vorstehenden erwähnter Vorbehalt deutlich zeigt, habe ich nie daran gedacht, die Gl. (1) als eine genügende Darstellung des Schwebungsphänomens für Intervalle von mehr als etwa ein Viertel Ton anzusehen, bin auch keineswegs der Meinung, daß das Problem des Zusammenklangs zweier einfachen Töne, selbst wenn man von Kombinationstönen absieht, vollständig gelöst sei. Handelt es sich um den anderen Grenzfall, um sehr große Intervalle, wo die Schwebungserscheinungen praktisch nicht mehr zum Bewußtsein des (naiven) Hörers gelangen, so genügt, wie bekannt, die Darstellung als Summe zweier Töne. Bei mittleren Intervallen bleibt die Frage offen, wie es zugeht, daß das Ohr gleichzeitig zwei getrennte Töne und Schwebungen wahrnimmt, und die wird wohl nicht ohne näheres Eingehen auf die Konstruktion des Ohres zu lösen sein. Die Fouriersche Reihe allein genügt nicht dazu, da sie nur die Summe zweier Töne liefert, ohne über Schwebungen etwas auszusagen.

(Eingegangen 26. Dezember 1917.)

1) E. Waetzmann, Resonanztheorie des Hörens, Braunschweig 1912, S. 142, vierte Kurve $\frac{81}{80}$.

Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen.

Von F. Jung.

Für das Schwerefeld gelten nach Einstein die Gleichungen[1])

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}=-\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \quad (1)$$

$$\sqrt{-g}=1,$$

wo

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}$$

die negativen Christoffelschen Dreizeiger-Größen zweiter Art sind, gebildet für den „Fundamentaltensor" $g_{\mu\nu}$, und

$$g=|g_{\mu\nu}|$$

seine Determinante. Die Feldgleichungen sind aufzufassen als Verallgemeinerungen der Laplace-Poissonschen Gleichung der Newtonschen Theorie. Sie werden abgeleitet mit Benutzung des „Riemann-Christoffelschen Tensors". Im folgenden soll eine Herleitung der linken Seite dieser Gleichungen vorgeführt werden, welche sie unmittelbar liefert durch einen Vorgang, den ich als Bildung der Feldableitung bezeichne. Er spielt eine wichtige Rolle bei der Behandlung der Größenfelder

1) Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. 49, 1916, auch selbständig.

überhaupt. Als Darstellungsmittel bietet sich am passendsten das Rechnen mit Ausdehnungsgrößen, wovon jedoch nur das Nötigste Anwendung finden soll[1]).

Die beiden Hauptkante.

Wir nehmen an, daß in einem Ausdehnungsgebiete (Raume) n-ter Stufe (d. h. von n Ausdehnungen) ein Verein (System) von n-Vektoren erster[2]) Stufe (Strecken) $\bar{a}^i$, $i = 1, .. n$, die Hauptvektoren, so gegeben ist, daß nicht drei davon in eine Ebene fallen, wenn sie von einem Punkte aus gezogen werden. Die Vektoren $\bar{a}^i$ bilden ein n-Kant, das Hauptkant. Außerdem soll ein zweiter Verein angenommen werden von ebenfalls n-Vektoren erster Stufe $\bar{a}_i$ so, daß die Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} \bar{a}_i \bar{a}^i &= 1, \\ \bar{a}_i \bar{a}^k &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

wo der Strich zwischen den Faktoren das innere Produkt bezeichnet. Die zweite Gleichung sagt aus, daß $\bar{a}_i$ senkrecht steht auf allen Hauptvektoren a^k außer $\bar{a}^i$. Aus der ersten folgt der Wert a_i von $\bar{a}_i$

$$a_i = \frac{1}{a^i \cos(a^i \bar{a}_i)}.$$

Die Vektoren $\bar{a}_i$ mögen die Gegenvektoren der $\bar{a}^i$ heißen, ihr n-Kant das Gegenkant des früheren. Geht man von dem Vereine der $\bar{a}_i$ aus, so erhält man als Gegenvektoren zu ihm wieder die $\bar{a}^i$, wie aus den Gleichungen (2) folgt, da die Faktoren vertauschbar sind. Wir bezeichnen deshalb die $\bar{a}_i$ ebenfalls als Hauptvektoren und ihr n-Kant als Hauptkant. Man hat also zwei reziproke Hauptkante, jedes ist das Gegenkant des anderen.

Ein beliebiger Vektor erster Stufe $\bar{c}$ kann offenbar durch die Hauptvektoren beider Vereine dargestellt werden in der Form

$$\bar{c} = \sum_i C_i \bar{a}^i = \sum_i C^i \bar{a}_i, \qquad (3)$$

$C_i \bar{a}^i$, bzw. $C^i \bar{a}_i$ ist die Komponente in der Richtung von $\bar{a}^i$, bzw. $\bar{a}_i$. Die Zahlen (Skalare) C_i, C^i sollen die zugehörigen Komponentenbeiwerte genannt werden. Eine Größe, welche dargestellt wird durch den Ausdruck

$$\bar{a} = \sum b, \bar{c}, d, \ldots, \bar{r}$$

wo $b, \bar{c}, ..$ Vektoren erster Stufe sind und der Beistrich als Zeichen der dyadischen Multiplikation dient, ist ein Affinor m-ter Ordnung („Tensor m-ten Ranges"), falls m die Anzahl der Faktoren ist. Die Größe $b, \bar{c}, .. \bar{r}$ ist eine Polyade m-ter Ordnung. Stellt man die Faktoren durch die Hauptvektoren dar, so folgen für $\bar{a}$ die Ausdrücke

$$\bar{a} = \sum_i A_{i_1 \ldots i_m} \bar{a}^{i_1}, \ldots \bar{a}^{i_m} = \sum_i A^{i_1 \ldots i_m} \bar{a}_{i_1}, \ldots \bar{a}_{i_m}$$

$$i_1, .. i_m = 1, \ldots n. \qquad (4)$$

Symmetrische Affinoren heißen Tensoren.

Multiplizieren wir einen Vektor erster Stufe $\bar{r}$ innerlich mit einem Affinor zweiter Ordnung $\bar{a}$, so ergibt sich ein neuer zu $\bar{r}$ affiner Vektor erster Stufe $\bar{r}'$

$$\bar{r}' = \bar{r} \mid \bar{a} = \bar{r} \mid (\sum b, \bar{c}) = \sum (\bar{r} \mid b)\, c, \qquad (5)$$

dessen Komponenten in die Richtungen der Vektoren $\bar{c}$ fallen, $(\bar{r} \mid b)$ sind die Komponentenbeiwerte. Wird $\bar{r}' = \bar{r}$, so ist $\bar{a}$ ein Einheitsaffinor. Für die beiden Hauptkante sind die Einheitsaffinoren

$$\bar{A}^{o,i}_{i,o} = \sum_i \bar{a}_i, \bar{a}^i; \quad \bar{A}^{i,o}_{o,i} = \sum_i \bar{a}^i, a_i. \qquad (6)$$

Es ist ja z. B. nach (2)

$$\bar{r} \mid \bar{A}^{o,i}_{i,o} = (\sum_k R_k \bar{a}^k) \mid (\sum_i a_i, a^i) = \sum_{ik} R^i_k (\bar{a}^k \mid \bar{a}_i) a^i = \sum_i R_i \bar{a}^i = \bar{r}.$$

Nach (5) erhalten wir durch Multiplikation eines Vektors mit $\bar{A}^{o,i}_{i,o}$, bzw. $\bar{A}^{i,o}_{o,i}$ seine Darstellung im Hauptkante der $\bar{a}^i$, bzw. $\bar{a}_i$.

Die Ableitungen der Hauptvektoren.

Wir nehmen an, daß die Hauptkante von Ort zu Ort sich stetig ändern, es soll die Änderung der Hauptvektoren hierbei bestimmt werden. Jenes Hauptkant, in welchem wir den Ortswechsel darstellen, heiße das Längskant, seine Vektoren Längsvektoren, das Gegenkant nennen wir Querkant, seine Vektoren die Quervektoren. Mit $\bar{a}_i$ seien von nun an die Längsvektoren bezeichnet, mit $\bar{a}^i$ die Quervektoren. Ein beliebiges Bogenelement $d\bar{s}$ kann man ausdrücken in der Form

$$d\bar{s} = \sum_i d\bar{s}_i, \qquad (7)$$

wo die $d\bar{s}_i$ seine Komponenten sind in den Richtungen des Längskantes. Es ist dann

1) Vgl. auch Jung, Die Feldableitung in allgemeinen Koordinaten. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien **126**, 1917, wo die ins Spiel kommenden Größen eingehender behandelt sind.

2) Nach der jetzt mehrfach üblichen Benennungsweise müßte man das einen „n-er-Vektor" heißen. Mir scheint diese Benennungsart eines Vektors nach der Zahl seiner Komponenten ganz ungeeignet, weil sie abhängt von der Anzahl der Ausdehnungen des Gebietes, in dem der Vektor liegt. Der „Vierervektor" z. B. des Ausdehnungsgebietes vierter Stufe ist im Gebiete dritter Stufe ein „Dreiervektor", der „Sechservektor" ein „Dreiervektor" usw. Die Graßmannsche Bezeichnung nach der Stufenzahl des Vektors dagegen hängt nur von diesem ab, ist also für ihn kennzeichnend. In diesem Sinne könnte man allenfalls Einservektor, Zweiervektor usw. sagen.

$$d\bar{s}_i = \bar{a}_i\, dx^i, \tag{8}$$

also

$$ds_i = a_i\, dx^i,$$

und

$$(ds)^2 = d\bar{s}\; d\bar{s} = \sum_{ik}(\bar{a}_i|\bar{a}_k)\, dx^i\, dx^k. \tag{7'}$$

Die Bogenelemente $d\bar{s}_i$ können wir ansehen als Änderungen eines Ortsvektors $\bar{r}$, gezogen von einem festen Punkte nach dem Anfangspunkte des Bogenelements $d\bar{s}$. Dann ist

$$d\bar{s}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_i} ds_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} dx^i$$

und daher nach (8)

$$\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i}. \tag{9}$$

Setzen wir voraus, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k}\right),$$

so folgt zunächst wegen (9)

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i}. \tag{10}$$

Für die Änderungen der Hauptvektoren hat man

$$d\bar{a}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial s_k} ds_k = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} dx^k,$$
$$d\bar{a}^i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial s_k} ds_k = \sum_k \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} \partial x^k. \tag{11}$$

Um sie in den Hauptkanten auszudrücken, haben wir die Vektoren $\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}$ und $\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}$ in ihnen darzustellen, was nach Früherem erreicht wird durch innere Multiplikation mit den betreffenden Einheitsaffinoren. Es ist

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^\varrho}|A^{\varrho,m}_{m,\sigma}| = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|\bar{a}^m\right)\bar{a}_m$$
$$= \frac{\partial a_i}{\partial x^\varrho}|A^{m,\varrho}_{\sigma,m}| = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|a_m\right)a^m$$
$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^\varrho}|A^{\varrho,m}_{m,\sigma}| = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}|\bar{a}^m\right)\bar{a}_m \tag{12}$$
$$= \frac{\partial a^i}{\partial x^\varrho}|\bar{A}^{m,\varrho}_{\sigma,m}| = \sum_m \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k}|\bar{a}_m\right)\bar{a}^m.$$

Die Komponentenbeiwerte unter den Summenzeichen in den ersten beiden Gleichungen sind gerade die Christoffelschen Dreizeigergrößen[1])

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|a^m = \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|a_m = \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}. \tag{13}$$

1) Vgl. Jung, a. a. O.

Entsprechend bezeichnen wir

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}|\bar{a}^m = \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}', \quad \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}|\bar{a}_m = \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}'. \tag{13'}$$

Daher wird

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_m \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}\bar{a}_m = \sum_m \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} a^m$$
$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} = \sum_m \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}'\bar{a}_m = \sum_m \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}'\bar{a}^m, \tag{14}$$

was in (11) einzusetzen ist.

Aus (2) folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}|a_m = -\,a^i\,\frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^k}$$

und daher nach (13) und (13')

$$\begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} mk \\ i \end{bmatrix}'. \tag{15}$$

Durch innere Multiplikation mit a_m bzw. a^m erhalten wir ferner aus (10)

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|\bar{a}_m = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i}|\bar{a}_m, \quad \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}|a^m = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^k}|\bar{a}^m$$

und demnach wegen (13)

$$\begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ki \\ m \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ki \\ m \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

weiter nach (15)

$$\begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} im \\ k \end{Bmatrix}'. \tag{17}$$

Jeder der von Ort zu Ort veränderlichen Hauptvektoren bestimmt ein Vektorfeld. Es sind also in dem Ausdehnungsgebiete n-ter Stufe n-Längenvektorfelder und ebensoviele Quervektorfelder übereinandergelagert. Ferner bestimmt die Gesamtheit der Hanptkante die Felder der Einheitsaffinoren $A^{0,i}_{i,0}$ und $A^{i,0}_{0,i}$.

Die Feldableitung.

Wir wollen nun den Begriff der Feldableitung einer Größe G einführen, welche gegeben sei als Funktion des Ortes in dem Ausdehnungsgebiete n-ter Stufe. Um einen Punkt O denken wir uns einen Gebietsteil u abgegrenzt durch ein geschlossenes Gebilde $n-1$-ter Stufe (Oberfläche). Die Elemente dieser Hülle sollen dv_1 heißen. Sie sind unendlich kleine Vektoren $n-1$-ter Stufe und mögen mit einem solchen Durchlaufungssinne genommen werden, daß ihre (senkrechte) Ergänzung aus u hinausgerichtet ist. Die Ergänzung jedes Hüllenelementes, $d\bar{v}_1$, werde in irgendeiner Art multipliziert mit dem zugehörigen G, das Integral dieser Produkte genommen über die ganze Hülle und hierauf durch die Maßzahl u dividiert. Zieht man die Hülle um

den Punkt O zusammen, läßt also u gegen Null abnehmen, so heiße der Grenzwert der so erhaltenen Größe die Feldableitung von G im Punkte O. Sie werde bezeichnet durch $\nabla \smile G$, wo das Zeichen $\smile$ für das jeweilige Multiplikationszeichen gesetzt ist[1]), also

$$\nabla \smile G = \lim_{u=0} \frac{1}{u} \int d\bar{v} \smile G . \qquad (18)$$

Man kann auch setzen

$$\nabla \smile G = \frac{1}{du} \Sigma d\bar{v} \smile G , \qquad (18')$$

wo du das Gebietselement ist um O in Gestalt eines unendlich kleinen Übervielflaches, $d\bar{v}$ die Elemente seiner Hülle. Das Element du wählt man am einfachsten so, daß seine Kanten zusammenfallen mit den Längsvektoren der Eckpunkte, die Hüllenelemente also mit den Überebenen der Längskante in den Eckpunkten. Man findet dann für $\nabla \smile G$ den Ausdruck[1])

$$\nabla \smile G = \Sigma_i \bar{a}^i \smile \frac{\partial G}{\partial x^i} , \qquad (19)$$

wo die $\bar{a}^i$ die Quervektoren sind.

Die Feldableitungsbildung ist ein Vorgang, welcher bekanntlich dazu dient, aus einem Größenfelde andere abzuleiten. Er liefert z. B. zu einem Skalarfelde den Gradienten, zu einem Vektorfelde die Divergenz, den Rotor (Wirbel) usw.[2]).

Wir nehmen jetzt an, daß die Skalare x^i allgemeine Koordinaten sind in dem Ausdehnungsgebiete n-ter Stufe. Aus (9) erhellt, daß die Längsvektoren $\bar{a}_i$ in die Tangentenrichtungen der Koordinatenlinien fallen, weshalb die Quervektoren senkrecht stehen auf den Koordinatenüberflächen. Fassen wir x^k als Feldgröße auf, so wird ihr Gradient

$$\nabla x^k = \Sigma_i \bar{a}^i \frac{\partial x^k}{\partial x^i} .$$

Da jedoch die Koordinaten als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden, ist

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{„ } i = k \end{cases}$$

und deshalb

$$\nabla x^k = \bar{a}^k . \qquad (20)$$

Die Quervektoren sind also die Gradienten der Koordinaten.

Bedeuten y^i andere Koordinaten, so sind diese Funktionen der x^i und umgekehrt

$$y^i = y^i(x^1, .. x^n), \quad x^i = x^i(y^1, .. y^n).$$

Dann ist

$$dx^i = \Sigma_k \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k, \quad dy^i = \Sigma_k \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k, \qquad (21)$$

die Koordinatendifferentiale dx^i, dy^i sind also kontravariante Größen. Für die Ableitungen des Ortsvektors $\bar{r}$ folgt

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} = \Sigma_k \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^i} = \Sigma_k \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}$$

Bezeichnen wir mit $\bar{b}_i$ die Längsvektoren der Koordinaten y^i, also

$$\bar{b}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^i} ,$$

so gehen die vorigen Gleichungen nach (9) über in

$$\bar{a}_i = \Sigma_k \bar{b}_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad \bar{b}_i = \Sigma_k \bar{a}_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} , \qquad (22)$$

die Längsvektoren sind demnach kovariant. Sind $\bar{b}^i$ die Gegenvektoren der $\bar{b}_i$, so gilt mit Rücksicht auf (2) die Gleichung

$$\Sigma_k \bar{a}_k \bar{a}^k = \Sigma_i \bar{b}_i \bar{b}^i = n = \text{const},$$

woraus durch Einsetzen des Ausdruckes von $\bar{b}_i$ nach (22) folgt

$$\Sigma_k \bar{a}_k \bar{a}^k = \Sigma_i \Sigma_k \bar{a}_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \bar{b}^i$$

und daher für $\bar{a}^k$ und ebenso für $\bar{b}^k$

$$\bar{a}^k = \Sigma_i \bar{b}^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}, \quad \bar{b}^k = \Sigma_i \bar{a}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} . \qquad (23)$$

Die Quervektoren sind also kontravariant.

Der Bildungsvorgang bei der Feldableitung ist unabhängig vom Koordinatenvereine. Daher ist zu erwarten, daß er invariant ist bei beliebigen Koordinatentransformationen. Dies bestätigt sich, denn es wird

$$\nabla \smile G = \Sigma_i \bar{a}^i \smile \frac{\partial G}{\partial x^i} = \Sigma_i \bar{a}^i \smile \left(\Sigma_k \frac{\partial G}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right)$$

$$= \Sigma_k \left(\Sigma_i \bar{a}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \smile \frac{\partial G}{\partial y^k} .$$

Nach (23) ist also

$$\Sigma_i \bar{a}^i \smile \frac{\partial G}{\partial x^i} = \Sigma_k \bar{b}^k \smile \frac{\partial G}{\partial y^k} . \qquad (24)$$

Die Feldableitungen der Längsvektoren.

Für den Einheitsaffinor $\bar{A}^{0,i}_{i,0}$, jetzt kurz mit $\bar{A}$ bezeichnet, erhalten wir nach (19) als Feldableitung erster Ordnung

$$\nabla \smile \bar{A} = \Sigma_k \bar{a}^k \smile \frac{\partial}{\partial x^k} (\Sigma_i \bar{a}_i \bar{a}^i)$$

$$= \Sigma_{ki} \bar{a}^k \smile \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} \bar{a}^i + \bar{a}_i \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} \right) .$$

Hält man in $\bar{A}$ bei der Ableitungsbildung die Rechtsfaktoren konstant, so fällt das zweite Klammerglied weg und es ist

1) Das Zeichen ∇ (Nubla) könnte kurz „*Fa*" gelesen werden.

2) Vgl. Jung, a. a. O.

$$\nabla \sim A = \sum_i (\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i . \qquad (25)$$

Die Feldableitung zweiter Ordnung wird dann

$$\nabla \sim (\nabla \sim A) = \sum_{ki} \bar{a}^k \sim \frac{\partial}{\partial x^k} [(\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i]$$
$$= \sum_{ki} \bar{a}^k \sim \frac{\partial}{\partial x^k} (\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i,$$

weil wieder das zweite Glied wegfällt, oder

$$\nabla \sim (\nabla \sim A_i) = \sum_i [\nabla \sim (\nabla, \bar{a}_i)], \bar{a}^i . \qquad (26)$$

Es kommt also auf die Feldableitung des Längsvektors $\bar{a}_i$ an, wie aus (25) und (26) ersichtlich.

Wegen (14) wird

$$\nabla \sim \bar{a}_i = \sum_k \bar{a}^k \sim \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_{lm} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} \bar{a}^k \sim \bar{a}_m$$
$$= \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] \bar{a}^k \sim \bar{a}^m . \qquad (27)$$

Nimmt man für $\sim$ das innere Produkt, so wird wegen (2)

$$\nabla \mid \bar{a}_i = \sum_k \begin{Bmatrix} ik \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right] \bar{a}^k \mid \bar{a}^m . \qquad (28)$$

Hierfür läßt sich noch ein anderer Ausdruck finden. Es ist nach (10)

$$\nabla \mid \bar{a}_i = \sum_k \bar{a}^k \mid \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} \mid \bar{a}^k$$

und bei Einführung der äußeren Multiplikation, bezeichnet durch $\wedge$, statt der inneren

$$\nabla \mid \bar{a}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} \wedge \bar{a}^k ,$$

wo $\bar{a}^k$ die (senkrechte) Ergänzung von a^k bedeutet.

Setzen wir das äußere Produkt

$$\bar{a}_{i_1} \wedge \bar{a}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \bar{a}_{i_m} = \bar{a}_{i_1 \ldots i_m},$$
$$i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m ,$$

so stellt $\bar{a}_{i_1 \ldots i_m}$ einen Vektor m-ter Stufe dar, welcher durch die Faktoren in der gegebenen Reihenfolge bestimmt ist. Der Vektor n-ter Stufe

$$\bar{a}_{1 \ldots n} = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{a}_n$$

ist im Ausdehnungsgebiete n-ter Stufe ein Skalar (Zahl). Es sei nun

$$\bar{a}_i \wedge \bar{a}_{k_1 \ldots k_{n-1}} = \bar{a}_{1 \ldots n}, \quad i \neq k ,$$

wo $\bar{a}_{k_1 \ldots k_{n-1}}$ das äußere Produkt der $n-1$ Hauptvektoren $\bar{a}_k$ außer $\bar{a}_i$ bedeuten soll in einer solchen Reihenfolge, daß diese Gleichung auch dem Vorzeichen nach befriedigt ist. Dann wird

$$a_i \wedge \frac{\bar{a}_{k_1 \ldots k_{n-1}}}{\bar{a}_{1 \ldots n}} = 1 ,$$
$$a_k \wedge \frac{\bar{a}_{k_1 \ldots k_{n-1}}}{\bar{a}_{1 \ldots n}} = 0, \quad k = k_1, \ldots k_{n-1}$$

während nach (2)

$$\bar{a}_i \wedge \bar{a}^i = 1 , \quad \bar{a}_k \wedge \bar{a}^i = 0 .$$

Demnach hat man

$$\bar{a}^i = \frac{\bar{a}_{k_1 \ldots k_{n-1}}}{\bar{a}_{1 \ldots n}}, \quad i \neq k .$$

In den letzten Ausdruck für $\nabla \mid \bar{a}_i$ eingesetzt liefert dies

$$\nabla \mid \bar{a}_i = \frac{1}{\bar{a}_{1 \ldots n}} \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} \wedge \bar{a}_{j_1 \ldots j_{n-1}} \qquad (29)$$
$$= \frac{1}{\bar{a}_{j \ldots n}} \frac{\partial \bar{a}_{1 \ldots n}}{\partial x^i} .$$

In (23) sind die Koeffizienten von $\bar{a}^k \sim \bar{a}_m$ und $\bar{a}^m \sim \bar{a}_k$ gleich wegen (16). Setzen wir also für $\sim$ das dyadische Produkt, so ist der Affinor

$$\nabla, a_i = \sum_{lm} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} \bar{a}^k, \bar{a}_m = \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] \bar{a}^k, \bar{a}^m \qquad (30)$$

ein Tensor.

Die Feldableitung zweiter Ordnung von $\bar{a}$ wird

$$\nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) = \sum_h \bar{a}^h \sim \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\sum_{lm} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \right)$$
$$= \sum_{hkm} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} \bar{a}^h \sim \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \right.$$
$$\left. + \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} a^h \sim \left(\frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^h} \sim \bar{a}_m + a^k \sim \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^h} \right) \right] .$$

Mit Rücksicht auf (14) folgt durch Einsetzen

$$\nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) = \sum_{hkm} a^h \sim \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} a^k \sim \bar{a}_m \right.$$
$$\left. + \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} \left(\sum_p \begin{Bmatrix} kh \\ p \end{Bmatrix} a^p \sim \bar{a}_m + \bar{a}^k \sim \sum_p \begin{Bmatrix} mh \\ p \end{Bmatrix} a_p \right) \right] .$$

Das mittlere Glied gestalten wir um nach (15) und ordnen nach den Hauptvektoren. Dann ist

$$\nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) = \sum_{hkm} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} ip \\ m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kh \\ p \end{Bmatrix} \right. \qquad (31)$$
$$\left. + \sum_p \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ph \\ m \end{Bmatrix} \right] a^h \sim \bar{a}^k \sim \bar{a}_m .$$

Dies ist gleichzeitig bei Ersetzung des Zeichens $\sim$ durch , (Beistrich) der Ausdruck für die dyadische Feldableitung zweiter Ordnung.

Beim Rechnen mit Polyaden ist die Verwendung einer Multiplikationsart vorteilhaft, welche ich als mehrfaltiges Produkt bezeichne[1]). Sie werde angedeutet durch Verdoppelung des Multiplikationszeichens und ist bestimmt durch die Gleichung beispielsweise

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_2, .., \bar{c}_k, \ldots \bar{d}_m, .., \bar{e}_r, ..)^{k\,r\,m\,..}_{\varrho\,x\,\mu\,\ldots} =$$

1) Vgl. Jung, a. a. O.

$$(a_1, \beta_2, \ldots, \gamma_\varkappa, \ldots, \delta_\mu, \ldots, \varepsilon_\varrho, \ldots) = (c_\xi - \varepsilon_\varrho), (e_\tau - \gamma_\varkappa), (d_m - \delta_\mu), \ldots \quad (32)$$
$$a_1, b_2, \ldots, \alpha_1, \beta_2, \ldots$$

wo $a, b, \ldots \alpha, \beta, \ldots$ irgendwelche Vektoren sind und durch die Zeiger die Stellung der Faktoren angedeutet ist in den beiden gegebenen Polyaden. Besondere Fälle dieser Multiplikation finden sich schon bei Gibbs[1]), z. B. das mehrfaltige innere Produkt. Eben dieses wollen auch wir jetzt benutzen, um von der dyadischen Feldableitung $\nabla, \bar{a}_i$ die mehrfaltige innere Feldableitung zu berechnen, und zwar

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{a}_i) = \sum_k \bar{a}^k \, {}^{\frac{1}{2}}_{11} \frac{\partial}{\partial x^{k_i}} \left(\sum_m \begin{Bmatrix} i k \\ m \end{Bmatrix} a^k, \bar{a}_m \right).$$

Wir bekommen das Ergebnis aus der Formel (31) offenbar durch Ersetzung des ersten Zeichens $\sim$ durch $^{\frac{1}{2}}_{11}$, des zweiten durch den Beistrich, also zeitgemäß (32)

$$a^k \, {}^{\frac{1}{2}}_{11}(\bar{a}^k, \bar{a}_m) = (a^k | \bar{a}_m) \, \bar{a}^k.$$

Wegen (2) bleiben nur jene Glieder übrig, für die $k = m$ wird, also

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{a}_i) = \sum_{hk} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i k \\ h \end{Bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} i p \\ h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k h \\ p \end{Bmatrix} + \sum_p \begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p h \\ h \end{Bmatrix} \right] \bar{a}^k.$$

Im dritten Gliede der eckigen Klammer läßt sich der Faktor $\begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix}$ herausheben bei der Summation nach h und dann wird nach (28) und (29)

$$\sum_{hp} \begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p h \\ h \end{Bmatrix} = \sum_p \begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix} \left(\sum_h \begin{Bmatrix} p h \\ h \end{Bmatrix} \right) = \frac{1}{a_1 \ldots_n} \sum_p \frac{\partial a_1 \ldots_n}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

Wir haben daher

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{a}_i) = \sum_{hk} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i k \\ h \end{Bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} i p \\ h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k h \\ p \end{Bmatrix} + \frac{1}{a_1 \ldots_n} \sum_p \frac{\partial a_1 \ldots_n}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i k \\ p \end{Bmatrix} \right] a^k. \quad (34)$$

Die Feldableitungen des Affinors $\bar{A}$ ergeben sich nun ohne weiteres durch Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke in (25) und (26)

Die Schwerefeldgleichungen.

Betrachtet man den erhaltenen Ausdruck (34) der Feldableitung zweiter Ordnung, so fällt seine Übereinstimmung auf mit der linken Seite der Einsteinschen Schwerefeldgleichungen. Wird über g keine Annahme gemacht, so lautet jene linke Seite

$$- \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \begin{Bmatrix} \mu \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \sum_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \mu \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x^\mu \, \partial x^\nu} - \sum_\alpha \begin{Bmatrix} \mu \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}.$$

Dies ist bis auf das dritte Glied genau der Komponentenbeiwert in $\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{a}_i)$. Letztere Größe ist unmittelbar die Verallgemeinerung der linken Seite in der Laplace-Poissonschen Gleichung

$$\nabla(\nabla \varphi) = -\varkappa \varrho,$$

(φ Schwerepotential, ϱ Massendichte), so daß man als Feldgleichungen versuchen könnte

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{a}_i) = -\varkappa \sum_k \Sigma_{ki} \bar{a}^k,$$

bzw. nach (26) für den Schwereaffinor

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, \bar{A}) = -\varkappa C, \quad (35)$$

wo

$$C = \sum_{ki} C_{ki} \bar{a}^k, a^i.$$

Aus dem Ausdrucke

$$\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, A) = \sum_i [\nabla^{\frac{1}{2}}_{11}(\nabla, a_i)], \bar{a}^i$$

[gemäß (26)], ist nach Einsetzung aus (34) wegen der Symmetrie in i und k ersichtlich, daß dies ein Tensor ist.

Wählt man zur Vereinfachung das Koordinatensystem so, daß

$$a_1 \ldots_n = \text{const},$$

dann fällt in (34) das letzte Klammerglied weg und (35) geht über in die Formeln (1). Aus der Beziehung (29) folgt dann

$$\nabla | \bar{a}_i = 0,$$

die Divergenz der Längsvektoren verschwindet. Solange also die Längsvektoren endlich bleiben, können die Koordinatenlinien derselben Schar einander nicht schneiden bei einem derartigen Koordinatensystem.

Wien, 24. Dezember 1917.

(Eingegangen 27. Dezember 1917.)

1) Gibbs-Wilson, Vector Analysis, New Haven, 1913.

Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker.

Das Absorptionsverhalten jedes chemischen Elements gegenüber von homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge läßt sich, wie Kossel[1]) und Siegbahn[2]) gezeigt haben, in folgender Weise graphisch darstellen (Fig. 1): An gewissen Stellen des Spektrums erleidet der

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 898, 1914.
2) Diese Zeitschr. 15, 753, 1914.

Absorptionskoeffizient plötzlich einen Sprung, während in den Spektralbezirken zwischen zwei solchen selektiven Absorptionsgebieten der Absorptionskoeffizient μ eine stetige, monotone Funktion der Wellenlänge λ ist. Diese Funktion ist bei allen bisher untersuchten Elementen eine lineare, wenn $\lg \mu$ und $\lg \lambda$ als Variable gewählt werden.

Zur ausreichenden Beschreibung der Absorptionseigenschaften irgendeines Elements sind somit folgende Bestimmungsstücke erforderlich:

I. Spektrale Lage der selektiven Absorptionsstellen.

II. Zahlenwerte der beiden Konstanten in der Gleichung zwischen $\lg \mu$ und $\lg \lambda$ für jeden Spektralbezirk zwischen zwei selektiven Stellen.

III. Größe des Sprunges im Absorptionskoeffizienten für jede dieser selektiven Stellen.

Von den beiden bisher bekannten selektiven Absorptionsgebieten ist das der K-Sekundärstrahlungsemission entsprechende am eingehendsten erforscht worden, da das L-Absorptionsgebiet bei Verwendung der gewöhnlichen Röntgenröhren nur bei sehr wenigen Elementen (Pt usf.) in Erscheinung tritt. Die folgenden Betrachtungen werden sich daher ausschließlich mit dem K-Absorptionsgebiet befassen.

I. Die genaue Lage der der K-Emission entsprechenden Absorptionsbandkante λ_A ist für die Elemente Fe bis Er von E. Wagner[1]) bestimmt worden, welcher das Resultat seiner Messungen in der Gleichung

$$r_A = 1{,}08 \cdot 10^5 (Z - 3{,}5)^2 \qquad (1)$$

zusammenfaßt; $r_A = \frac{1}{\lambda_A}$ ist die Frequenz der Bandkante und Z bedeutet die Ordnungszahl des betreffenden Elements im periodischen System. Die überraschend große Schärfe der Bandkante auf den Spektralaufnahmen deutet darauf hin, daß der Sprung im Zahlenwert des Absorptionskoeffizienten sich in einem außerordentlich engen Spektralbereich vollzieht. Die Verbindung der beiden logarithmischen Geraden (G_1 und G_2 in Fig. 1) durch eine vertikale Gerade an der Stelle λ_A gibt somit ein physikalisch richtiges Bild der Absorptionserscheinungen, sobald die Gültigkeitsgrenze von G_1 auf $\lambda \leqq \lambda_A$, von G_2 auf $\lambda > \lambda_A$ festgesetzt wird.

II. Durch Verknüpfung der Barklaschen Absorptionskoeffizienten der Eigenstrahlungen

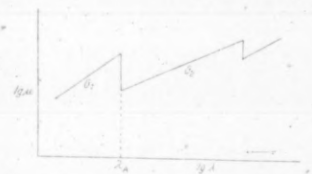


Fig. 1.

der Elemente mit den von Moseley ermittelten Wellenlängenwerten haben Kossel und Siegbahn für die Absorption beiderseits der Bandkante λ_A folgende Beziehungen erhalten:

$$\frac{\mu}{\varrho} = A \lambda^b \text{ für } \lambda > \lambda_A \qquad (2)$$

ϱ = Dichte

$$\frac{\mu}{\varrho} = A' \lambda^b \text{ für } \lambda \leqq \lambda_A . \qquad (3)$$

Die Geraden G_1 und G_2 wären also in Fig. 1 zueinander parallel zu zeichnen. Die Werte von b sind von Element zu Element nur wenig verschieden und liegen zwischen den Grenzen 2,55 und 2,90, während die Konstanten A und A' mit zunehmendem Atomgewicht größer werden.

III. Über die Größe des Sprunges des Absorptionskoeffizienten an der Stelle λ_A ist sehr wenig bekannt. Kossel gibt an, daß er bei den Elementen der Gruppe Fe bis Zn 7,4, beim Aluminium 11 beträgt.

Die in der Zwischenzeit erfolgte Veröffentlichung weiteren experimentellen Materials gibt näheren Aufschluß in bezug auf die Punkte II und III. Die untere Gültigkeitsgrenze der Absorptionsgesetze [Gleichungen (2) und (3)], welche bisher nur für Wellenlängen $\lambda \geq 0{,}56 \cdot 10^{-8}$ cm experimentell gesichert waren, kann um ein beträchtliches Stück vorgeschoben werden. Ferner ist es möglich für eine große Reihe von Elementen die charakteristischen Konstanten A und A' zu bestimmen, so daß die wichtige Frage, ob sich die Werte A und A' in eine einfache Beziehung zu der fundamentalen Größe Z bringen lassen, mit Erfolg in Angriff genommen werden kann.

1. Absorption in Aluminium.

Das Element, dessen Absorptionseigenschaften am genauesten untersucht worden sind, ist das Aluminium. Wie die Fig. 2 zeigt, erstreckt sich hier die experimentell geprüfte Gültigkeit der Gleichung (3) auf den großen Wellenlängenbereich von $\lambda = 0{,}15 \cdot 10^{-8}$ bis $\lambda = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm.

[1]) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915; Bayr. Akad. d. Wiss., 4. April 1916.

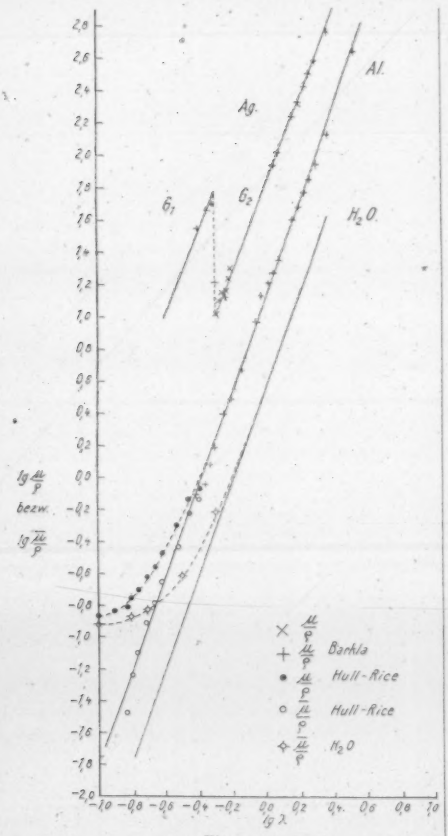


Fig. 2.

Eine Extrapolation bis etwa $\lambda = 7{,}8 \cdot 10^{-8}$, wo die selektive Absorptionsstelle λ_A liegen dürfte — eine direkte, experimentelle Bestimmung steht noch aus — erscheint ohne weiteres erlaubt. Bei einer Diskussion der unteren Grenze ist zu beachten, daß nicht der direkt ermittelte, (μ), sondern der „korrigierte" Absorptionskoeffizient $(\overline{\mu})$ diesem einfachen Gesetz gehorcht. Zwischen beiden Größen besteht die Gleichung

$$\mu = \overline{\mu} + s \qquad s = \text{Zerstreuungskoeffizient.} \qquad (4)$$

Bei Absorptionsmessungen im kurzwelligen Gebiet ist nämlich ein großer Prozentsatz der beim Durchgang durch die Schicht beobachteten Abnahme der Primärenergie auf Rechnung der entstehenden Streustrahlung zu setzen. Für Aluminium ist schon bei $\lambda = 0{,}2 \cdot 10^{-8}$ cm dieser Verlust infolge Streuung von der gleichen Größenordnung wie der „wahre" Absorptionsverlust infolge Transformation der Primärenergie in Wärme und in solche Strahlungsenergien, die als charakteristische Sekundärstrahlung und als sekundäre Korpuskularstrahlung wieder in Erscheinung treten. Die im kurzwelligen Gebiet der Fig. 2 eingezeichneten Werte $\left(\frac{\mu}{\varrho}\right.$ experimenteller, $\frac{\overline{\mu}}{\varrho}$ korrigierter Massenabsorptionskoeffizient$\left.\right)$ entstammen Messungen von Hull und Rice[1]) an isolierten, engen Spektralbezirken des Impulsspektrums einer technischen Röntgenröhre. Der von Hull und Rice für $\frac{s}{\varrho}$ eingesetzte Wert 0,12 ist kleiner als der bekannte Barklasche Wert 0,2, welcher vom Härtegrad unabhängig und für alle leichten Elemente gleich groß sein soll. Obgleich aus der Arbeit von Hull und Rice nicht hervorgeht, auf welche Weise die Verfasser gerade zu dem Wert 0,12 gelangen, darf als sicher gelten, daß der Barklasche Wert 0,2 für die ganz kurzen Wellenlängen zu groß ist[2]). Für $\lambda = 0{,}16 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt sich nämlich der experimentelle, unkorrigierte Absorptionskoeffizient $\frac{\mu}{\varrho}$ zu 0,18, also kleiner als $\frac{s}{\varrho}$ (nach Barkla), während aus energetischen Gründen immer $\frac{\mu}{\varrho} > \frac{s}{\varrho}$ sein muß. Es liegt der Gedanke nahe zu vermuten, daß der Streuungskoeffizient $\frac{s}{\varrho}$ mit abnehmender Wellenlänge im kurzwelligen Gebiet ebenfalls abnimmt. Diese Annahme wird gestützt durch die Messungen von Ishino[3]), welcher für sehr harte γ-Strahlen bei Aluminium $\frac{s}{\varrho}$ zu 0,04 bestimmte. In diesem Zusammenhang betrachtet, gewinnt auch die auffallend große Abweichung des letzten Versuchspunktes in Fig. 2 $(\lg \lambda = -0{,}83)$ eine prinzipielle Bedeutung; bei dieser Wellenlänge $(\lambda = 0{,}15 \cdot 10^{-8}$ cm) scheint demnach $\frac{s}{\varrho}$ bereits kleiner als 0,12 zu sein.

Es ist von vornherein zu erwarten, daß auch

1) Phys. Rev. 8, 326, 1916.
2) Phil. Mag. 33, 129, 1917.
3) Die diesbezüglichen Messungen Barklas erstrecken sich nicht sehr weit in das kurzwellige Gebiet. Die unter Benutzung dieses Wertes 0,2 berechneten Werte $\frac{\overline{\mu}}{\varrho}$ würden mit abnehmender Wellenlänge von der Geraden in Fig. 2 stark nach unten abweichen.

die Absorption der γ-Strahlen des Radiums dem in Fig. 2 dargestellten Gesetz gehorcht. Eine genaue Prüfung wird erschwert durch die Inhomogenität der γ-Strahlen und durch die Verschiedenheit der Angaben der Absorptionskoeffizienten, welche bekanntlich von der besonderen Art der Versuchsanordnung abhängig sind[1]). Tabelle I enthält einige Zahlenwerte für $\frac{\mu}{\varrho}$ (experimenteller, unkorrigierter Massenabsorptionskoeffizient), aus dem durch Abzug von $\frac{s}{\varrho}$ nach Gleichung 4 die wahre Absorption $\frac{\overline{\mu}}{\varrho}$ erhalten wird.

Tabelle I.

Clelland[2])	$\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{Al} = 0{,}038$
Rutherford[3])	0,042
Keetman[4])	0,05
Ishino[5])	0,066.

Die einzige experimentelle Bestimmung von $\frac{s}{\varrho}$ findet sich bei Ishino, welcher $\frac{\overline{\mu}}{\varrho} = 0{,}026$ aus seinen Messungen berechnet. Nach Fig. 2 wäre diesem Wert eine Wellenlänge $\lambda = 0{,}12 \cdot 10^{-8}$ cm zuzuordnen, während sich aus den Spektralaufnahmen von Rutherford[2]) für das kurzwellige γ-Strahlenspektrum von Radium B und C eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 0{,}13 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt. Das für Röntgenstrahlen aufgestellte Absorptionsgesetz behält somit seine Gültigkeit auch bei der Absorption der sehr durchdringungsfähigen γ-Strahlen. Wenn man bedenkt, daß der optisch sichtbare Teil des Spektrums nur eine Oktave umfaßt, so erscheint es sehr bemerkenswert, daß die einfache Absorptionsbeziehung des Aluminiums in einem Bereich von mehr als sechs Oktaven sich als gültig erweist. Für die Frage der noch unsicheren Existenz einer J-Serienemission läßt sich hieraus folgern, daß für Aluminium die Wellenlänge der entsprechenden Absorptionsbandkante λ_J sicher kleiner als $0{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm sein muß, während für alle Elemente mit höheren Atomgewichten λ_J bei noch kürzeren Wellenlängen zu suchen ist.

2. Absorption in Wasser.

In verschiedenen neueren Arbeiten wurde darauf hingewiesen, daß das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten von Aluminium und Wasser mit zunehmendem Härtegrad der Strahlung abnimmt. Bei einer Erklärung dieser zunächst überraschenden Beobachtung — beim Ausschluß selektiver Absorptionsgebiete ist bekanntlich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten zweier Elemente eine von der Wellenlänge unabhängige Konstante — sind folgende Möglichkeiten in Betracht zu ziehen.

1. Vorhandensein einer selektiven Absorptionsstelle des Wassers. (Das „normale" Absorptionsverhalten des Aluminiums wurde bereits oben bewiesen.)

2. Erhebliche Verschiedenheit der Werte von b für Aluminium und Wasser.

3. Einfluß des bei der Absorptionsmessung auftretenden Energieverlustes infolge Streuung, welcher bei beiden Elementen einen verschieden großen Bruchteil der gesamten, gemessenen Absorption beträgt.

Eigene Versuche[1]) des Verfassers mittels der auf Seite 334 des Jahrganges 1917 dieser Zeitschrift beschriebenen Methode widerlegen die an und für sich wenig wahrscheinliche Annahme einer Anomalie der Absorption des Wassers.

Sucht man die Härteinkonstanz des Absorptionsverhältnisses von Wasser und Aluminium als eine Folge der verschiedenen b-Werte zu deuten, so würde sich unter der Voraussetzung $b_{Al} = 2{,}94$ etwa $b_{H_2O} = 2{,}2$ ergeben, ein Wert, der wesentlich kleiner wäre als sämtliche bekannten b-Werte (vgl. Tabelle II).

Da für die Absorption des Wassers hauptsächlich die Sauerstoffatome in Betracht kommen, darf bei der benachbarten Stellung von O und Al im periodischen Sytem b für beide Stoffe annähernd gleich groß angenommen werden (vgl. Tabelle II: $b_{\text{Stickstoff}} = 2{,}88$). Auf Grund der Beobachtung, daß Al im langwelligen Gebiet zehnmal so stark absorbiert wie H_2O, ergibt sich für das mutmaßliche Absorptionsgesetz des Wassers die in Fig. 2 eingezeichnete logarithmische Gerade. Bei Berücksichtigung der Streustrahlung[2]) Gleichung (4) erhält man für die experimentell zu beobachtenden Werte des Absorptionskoeffizienten $\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{H_2O}$ die gestrichelte Kurve, die im langwelligen Gebiet, wo $\frac{s}{\varrho} \ll \frac{\overline{\mu}}{\varrho}$ ist, mit der Geraden zusam-

1) Brommer, diese Zeitschr. **13**, 1037, 1912. (Auftreffen sekundärer Strahlungen auf die Ionisationskammer.)
2) Phil. Mag. **25**, 722, 1913.
3) Phil. Mag. **28**, 263, 1914.
4) Ann. d. Phys. **52**, 709, 1917.
5) l. c.

1) Glocker und Reusch, Fortschr. a. d. Gebiet der Röntgenstr. **24**, 528, 1917.
2) Nicht zu verwechseln mit dem bei Absorptionsmessungen häufig vorkommenden „Streufehler", der darin besteht, daß ein Teil der entstehenden Streustrahlung auf das Strahlungsreagens fällt und die Intensitätsmessung fälscht.

menfällt. Aus den beiden gestrichelten Kurven der Fig. 2 läßt sich für jedes λ das Verhältnis $\frac{(\mu/\varrho)_{Al}}{(\mu/\varrho)_{H_2O}}$ und $\frac{\mu_{Al}}{\mu_{H_2O}}$ berechnen. Diese theoretischen Werte stimmen gut überein mit den Messungen von Winawer und Sachs[1]), welche an technischen, gefilterten Röntgenstrahlungen gleichzeitig μ_{Al} und μ_{H_2O} bestimmt haben (Fig. 3).

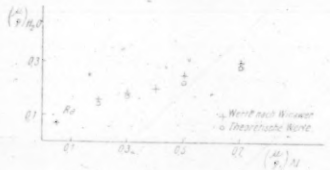


Fig. 3.

Die experimentell ermittelte Wellenlängenabhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\mu_{Al}}{\mu_{H_2O}}$ läßt sich also zwanglos damit erklären, daß der zu dem „wahren" Absorptionsverlust hinzutretende Energieverlust infolge Zerstreuung eine mit abnehmenden Wellenlängen wachsende Annäherung der beiden experimentellen Absorptionskurven (gestrichelte Kurven in Fig. 2) bewirkt. Für die γ-Strahlen des Radiums ergibt sich experimentell $\frac{(\mu/\varrho)_{Al}}{(\mu/\varrho)_{H_2O}}$ nahezu $= 1$. Der gemessene Absorptionsverlust besteht hier zum größten Teil aus einem Energieverlust infolge Zerstreuung, d. h. $\frac{\mu}{\varrho}$ nahezu $= \frac{s}{\varrho}$; für alle leichten Atome ist aber $\frac{s}{\varrho}$ gleich groß, daher $\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)$ für beide Stoffe annähernd gleich.

3. Absorption in Silber.

Während die Mehrzahl der bisher bestimmten Absorptionskoeffizienten durch Messungen an den nicht streng homogenen[2]) Eigenstrahlungen der Elemente C_r bis C_e erhalten wurde, finden sich für die Absorption in Silber einige Angaben bei Bragg[3]), bei deren Ermittlung isolierte Spektrallinien von *Rh*, *Pd*, *Ag* als Strahlungsquelle dienten. Ein Blick auf die Fig. 2 zeigt die gute Einordnung dieser exakten Absorptionskoeffizienten in die Gerade, wie sie sich allein unter Benutzung der mit + bezeichneten Werte (gemessen an Eigenstrahlungen) ergibt. Man sieht, daß der durch die Inhomogenität der verwendeten Strahlung bedingte Fehler die Größenordnung der möglichen Versuchsfehler nicht überschreitet.

Es ist daher zu erwarten, daß die in Tabelle II angegebenen Werte für die charakteristischen Konstanten keine wesentlichen Änderungen erleiden würden, falls sämtliche Absorptionsbestimmungen an Spektrallinien vorgenommen würden. Die Inhomogenität der Strahlung kommt jedoch darin zum Ausdruck, daß etwa auf $^1/_4$ der Höhe des Absorptionssprunges ein Versuchspunkt[1]) liegt (Fig. 2), der von der Eigenstrahlung des *Sn* herrührt. Während das α-Dublett nach dem Gesetz G_2 absorbiert wird, gilt für das kurzwelligere β-Dublett bereits das Gesetz G_1, da die Beziehung gilt

$$\lambda_{\alpha Sn} > \lambda_{Ag} > \lambda_{\beta Sn}.$$

4. Charakteristische Konstanten und Atomzahl.

In gleicher Weise lassen sich die charakteristischen Konstanten A, A' und b für die Elemente *N*, *Mg*, *Fe*, *Ni*, *Cu*, *Zn*, *Sn*, *Pb* gra-

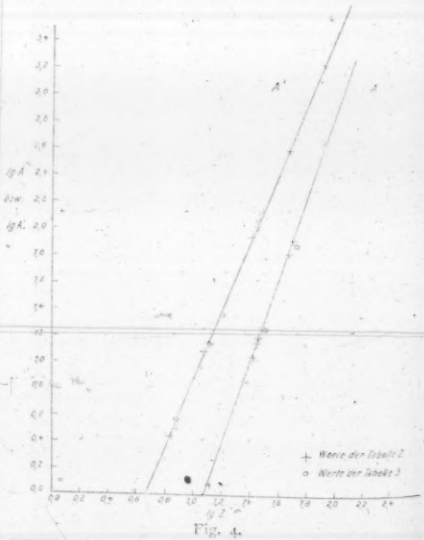


Fig. 4.

1) Winawer und Sachs, diese Zeitschr. 16, 258, 1915.

2) Außer dem α-Dublett sind noch zwei wesentlich schwächere Linien (β und γ) mit ihren um etwa 10 Proz. kürzeren Wellenlängen darin enthalten. Bei den graphischen Bestimmungen wird λ_β und λ_γ gegenüber von λ_α vernachlässigt.

3) Phil. Mag. 29, 407, 1914.

1) Vgl. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 342, 1916.

phisch bestimmen (Tabelle II). Da sich hierbei nichts prinzipiell Neues ergibt, wurde von einer Wiedergabe der Zeichnungen abgesehen. Laut Gleichung (2) und (3) bezieht sich A auf den Bereich $\lambda > \lambda_A$, A' auf den Bereich $\lambda \leq \lambda_A$. Während die Schwankungen der b-Werte klein bleiben, sind die Unterschiede in der Größe der Konstanten A bzw. A' sehr groß. Sie zeigen das deutliche Bestreben mit wachsender Atomzahl Z zuzunehmen. Eine einfache graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Z und A bzw. A' läßt sich dadurch gewinnen, daß $\lg Z$ und $\lg A$ bzw. $\lg A'$ als Koordinaten gewählt werden (Fig. 4). Wie aus der Figur ersichtlich ist, liegen die Punkte (+) mit ausgezeichneter Genauigkeit auf zwei Geraden.

Tabelle II.

	Z	$\lg Z$	A	$\lg A$	A'	$\lg A'$	b	$\lambda_A \cdot 10^8$
Ni	7	$0{,}84_5$	—	—	2,8	$0{,}44_5$	2,88	—
Mg	12	1,08	—	—	12	1,08	2,82	9,4*
Al	13	1,11	1,17	0,07	13,8	1,14	2,94	7,9*
Fe	26	$1{,}41_5$	11	1,04	87	1,94	2,73	1,76
Ni	28	1,45	14,2	1,15	106	$2{,}02_5$	2,66	1,50
Cu	29	1,46	15,5	1,19	116	$2{,}06_5$	2,79	1,39
Zn	30	1,48	18,7	1,27	132	2,12	2,70	1,29
Ag	47	1,67	66	1,82	389	2,59	2,95	0,49
Sn	50	1,70	84	1,92	—	—	$2{,}6_0$	$0{,}42_5$
Pb	82	1,91	430	2,63	1710	3,23	3,0	$0{,}13_5$

*) Extrapoliert.

Für die wichtige Beziehung zwischen der Atomzahl Z und A bzw. A' ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A = 0{,}0004\, Z^{3,14} \text{ für } \lambda > \lambda_A, \quad (5)$$

$$A' = 0{,}0195 \cdot Z^{2,58} \text{ für } \lambda \leq \lambda_A, \quad (6)$$

wobei λ in Ångström ($= 10^{-8}$ cm) gemessen wird.

Die Größe des Absorptionssprunges an der Stelle der Absorptionsbandkante λ_A (vgl. Fig. 1), d. h. der multiplikative Faktor, mit dem der Absorptionskoeffizient dort zu multiplizieren ist, ist $a = \frac{A'}{A}$. Wie Gleichung (5) und (6) lehrt, nimmt er mit wachsender Atomzahl Z ab, und zwar annähernd proportional mit $\sqrt{Z}$.

Für die Werte von b läßt sich ein systematischer Gang mit der Atomzahl Z nicht auffinden. Andererseits sind die Unterschiede bei den einzelnen Elementen derartige, daß sie wohl kaum ausschließlich als Folge von Versuchsfehlern erklärt werden können. Für Interpolationsrechnungen ist der Mittelwert $b = 2{,}8$ am besten geeignet.

Das Absorptionsverhalten irgendeines Elementes in den Spektralgebieten beiderseits der Absorptionsbandkante λ_A der K-Serie läßt sich nunmehr in folgender Weise darstellen aus (2), (3), (5), (6):

$$\frac{\mu}{\varrho} = 0{,}0004\, Z^{3,14} \lambda^{2,8} \text{ für } \lambda > \lambda_A \quad (7)$$

$$\frac{\mu}{\varrho} = 0{,}0195\, Z^{2,58} \lambda^{2,8} \text{ für } \lambda \leq \lambda_A. \quad (8)$$

Als Maßeinheit für λ gilt 1 Ångström $= 1 \cdot 10^{-8}$ cm. μ „wahre" Absorption (vgl. Gl. (4)).

Diese beiden Beziehungen sind theoretisch und praktisch von großer Bedeutung. Als zusammenfassende Darstellung des gesamten empirischen Materials werden sie für eine Theorie der Absorption der Röntgenstrahlen von Nutzen sein, während sie für technische Zwecke bei der Verwendung bisher nicht auf Absorption geprüfter Stoffe [vgl. Abschnitt 5] umständliche Versuche ersparen werden.

Ihr spektraler Gültigkeitsbereich erstreckt sich nach der langwelligen Seite bis zu der kurzwelligeren Absorptionsbandkante λ_A der L-Serie, welche erst bei den Elementen mit Z größer als 70 im Gebiet der technischen Röntgenstrahlungen liegt ($\lambda_{A_1} = 0{,}934 \cdot 10^{-8}$ cm für Pt, $\lambda_{A_2} = 0{,}914 \cdot 10^{-8}$ cm für Au). Die Spektralbezirke, in denen λ_{A_2} bei den Elementen mit leichteren Atomen liegt, werden nämlich schon durch die Glaswand der Röhre völlig absorbiert. Da sich andrerseits die Gültigkeit der Gleichung (7) und (8) bis zu den kürzesten bisher bekannten Röntgenwellenlängen erstreckt, so liefern sie ein das ganze technische Strahlungsgebiet umfassendes Absorptionsgesetz für alle Elemente mit Z kleiner als 70, während für die übrigen Elemente wenigstens der größere und praktisch wichtigere Teil des technischen Strahlungsgebietes in dem Gültigkeitsbereich enthalten ist.

Nimmt man zu den Gleichungen (7) und (8) die Gleichung (1) hinzu, so erhält man eine den drei Bedingungen der Einleitung völlig genügende, quantitative Darstellung der Absorption im K-Gebiet.

5. Die Berechnung der Absorption chemischer Verbindungen.

Bei einer Anwendung der Gleichung (7) und (8) auf die Absorption chemischer Verbindungen begegnet man der Schwierigkeit, daß die Größe Z in diesem Falle nicht mehr definiert ist. Ausgehend von dem empirischen Gesetz der additiven Absorption einer Verbindung kann man jedoch in folgender Weise jeder chemischen Verbindung eine Zahl Z zuordnen, welche ihr Absorptionsverhalten in eindeutiger Weise bestimmt:

Sind in N Molekülen einer Verbindung N_1

Atome des ersten, N_2 des zweiten ... Elements enthalten, so berechnet sich der Absorptionskoeffizient α der Verbindung (bezogen auf 1 Molekül) gemäß der Gleichung[1])

$$N\alpha = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 + \ldots \quad (9)$$

aus den Atomabsorptionskoeffizienten α_1, α_2 usf. der einzelnen Komponenten. Durch Umformung ergibt sich hieraus

$$\frac{\mu}{\varrho}\cdot N\cdot M = \frac{\mu_1}{\varrho_1}N_1\cdot M_1 + \frac{\mu_2}{\varrho_2}N_2 M_2 + \ldots \quad (10)$$

$\frac{\mu}{\varrho}, \frac{\mu_1}{\varrho_1}\ldots$ Massenabsorp.-Koeffizient $M, M_1 M_2 \ldots$ Atom- bzw. Molekulargewicht. Durch Kombination mit Gleichung (5) bzw. (6) folgt

$$Z^{2,58} = Z_1^{2,58}\cdot\frac{N_1 M_1}{N M} + Z_2^{2,58}\cdot\frac{N_2 M_2}{N M} + \ldots$$

$$\text{für } \lambda \leq \lambda_A \quad (11)$$

$$Z^{3,14} = Z_1^{3,14}\frac{N_1 M_1}{N M} + Z_2^{3,14}\frac{N_2 M_2}{N M} + \ldots$$

$$\text{für } \lambda > \lambda_A . \quad (12)$$

Aus den experimentellen Angaben der Absorptionskoeffizienten verschiedener gasförmiger Verbindungen[2]) wurden durch Benutzung der Gleichung (10) bzw. (11) folgende Werte für Z erhalten (die Konstanten A, A' und b wurden, wie oben, graphisch ermittelt):

Tabelle III.

	Z	$\lg Z$	A'	$\lg A'$	A	$\lg A$
CO_2	7,5	0,87	3,2	0,50	—	—
H_2O	7,6	0,88	3,7	0,57	—	—
SO_2	13	1,11	13,8	1,14	—	—
SH_2	16	1,20	22,9	1,36	—	—
C_2H_5Br	31,7	1,50	—	—	17,8	1,25
CH_3J	51,7	1,71	—	—	76	1,88

Wie die Fig. 4 zeigt, sind die Punkte o in guter Übereinstimmung mit den früher ermittelten logarithmischen Geraden, welche für die Elemente A und A' als Funktion von Z darstellen. Die Gleichungen (11) und (12) können also gedeutet werden als eine Substitution einer chemischen Verbindung durch ein ihr in bezug auf das Absorptionsverhalten äquivalentes Element. Die Atomzahl Z ist bei den Elementen gleich der Anzahl der in einem Atomkern enthaltenen Elementarladungen. Die für eine chemische Verbindung ermittelten Z-Werte (Tabelle III) sind immer kleiner als die Summe der Z-Werte der einzelnen elementaren Komponenten. Diese Tatsache ist wohl so aufzufassen, daß von der Gesamtzahl der in einem Molekül einer Verbindung enthaltenen Kernladungen nur ein gewisser Teil bei der Absorption der Röntgenstrahlen in Wirksamkeit tritt. Auf Grund dieser Anschauung ist zu erwarten, daß sich bei größerer experimenteller Genauigkeit für die Z der Tabelle III ganze Zahlen ergeben.

Ferner ist diese Substitutionsmethode von erheblichem Nutzen für praktische Zwecke, weil sie es gestattet im Verein mit dem Absorptionsgesetz (7) und (8) für jeden beliebigen Stoff allein aus der Kenntnis seiner chemischen Zusammensetzung[1]) die Absorptionskoeffizienten gegenüber Röntgenstrahlen beliebiger Wellenlänge zu berechnen.

Nachtrag.

Erst nach Abschluß dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von der Braggschen Absorptionsformel $A = C\cdot Z^4\lambda^{7/3}$, wobei A der Atomabsorptionskoeffizient ist. Vor dem Absorptionssprung ist $C = 0{,}235\cdot 10^{-6}$, nach demselben ist $C = 1{,}79\cdot 10^{-6}$. Die Größe des Absorptionssprunges ergibt sich hieraus im Widerspruch zu der experimentellen Erfahrung als eine für alle Elemente universelle Konstante, nämlich 7,6. Bei jedem Absorptionsgesetz, das die experimentell beobachtete Abnahme des Sprungfaktors f mit zunehmendem Z zum Ausdruck bringen soll ($f = 4$ für Pb, $f = 11$ für Al), muß der Exponent von Z vor dem Sprung ein anderer sein als nach dem Sprung. Auch dürfte der Wert des Exponenten von λ etwas zu klein sein. Bei einer Anwendung der Braggschen Gleichung auf die Absorption in Blei ergeben sich beim Vergleich mit den experimentellen Werten von Hull und Rice[3]) sehr große Differenzen, welche jenseits des Sprunges bis zu 250 Proz. betragen.

Der Verfasser.

1) Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, S. 261.
2) Owen, Proc. Roy. Soc. **86**, 426, 1912; Barkla-Colliers, Phil. Mag. **23**, 987, 1912.

1) Tabelle sämtlicher Z-Werte für Elemente bei Wagner, diese Zeitschr. **18**, 418, 1917.
2) Wagner, diese Zeitschr. **18**, 432 ff., 1917.
3) Phys. Rev. **8**, 326, 1916.

(Eingegangen 21. Dezember 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen [1]).

Von O. Lehmann.

Einleitung.

Physik und Chemie legten bisher das Axiom zugrunde, jeder „Stoff" existiere in drei „Aggregatzuständen". Nach dieser „Identitätstheorie" sind also die Moleküle in allen drei Zuständen dieselben, letztere unterscheiden sich nur durch die Art der Aggregation der Moleküle. Jedes Lehrbuch weist ausdrücklich darauf hin, polymorphe Umwandlung, Schmelzen und Verdampfen seien „physikalische" Aggregatszustandsänderungen im Gegensatz zu den „chemischen" Erscheinungen, bei welchen die Moleküle selbst sich ändern. Wäre diese Theorie richtig, so könnten flüssige Kristalle nicht existieren, denn nach ihr ist Kristallisation gleichbedeutend mit Erstarrung (und Entglasung). Während in Flüssigkeiten (und amorphen Gläsern, d. h. überkühlten Schmelzen) die Anordnung der Moleküle eine regellose ist (weshalb diese Stoffe isotrop erscheinen), sind in Kristallen die gleichen Moleküle zu einem anisotropen Gebäude, einem Raumgitter fest zusammengefügt, welches nicht fließen kann.

In das bisherige System der Physik passen hiernach die flüssigen Kristalle nicht hinein, die Lehrbücher erwähnen meist nicht einmal ihre Existenz. Voraussetzung der Behandlung flüssiger Kristalle wäre der Nachweis der Unhaltbarkeit der Identitätstheorie, der Notwendigkeit, dieselbe durch die „Theorie der molekularen Isomerie" [2]) zu ersetzen. Erst die Erkenntnis des Irrtums hat die Entdeckung der „flüssigen Kristalle" [3]) ermöglicht. Nachdem neuerdings Erforschung der Molekularstruktur mit Hilfe von Röntgenstrahlen geglückt ist, dürfte die exakte Bestätigung der Unzulässigkeit des Axioms der „drei Aggregatzustände jedes Stoffes" nur noch eine Frage der Zeit sein [1]).

Auf Grund des unrichtigen Axioms hat man weiter geschlossen, das Raumgitter eines Kristalls mache dessen Wesen aus, eine Störung des Raumgitters sei unmöglich, abgesehen von dem Falle, daß es plötzlich wie ein Kartenhaus in ein anderes Raumgitter umklappe, als welchen man die polymorphe Umwandlung betrachtete. Nun sind die wesentlichen Eigenschaften, (z. B. die Löslichkeiten) der polymorphen Modifikationen verschieden, wie man ohne weiteres daraus erkennt, daß eine labile Modifikation aufgezehrt wird, wenn sie sich neben der stabilen in derselben Lösung befindet (unter Bildung eines „Hofes" um letztere), weil, entgegen der alten Auffassung, jede Lösung habe nur einen einzigen Sättigungspunkt, (wie sich aus meinen Versuchen ergab), der Sättigungspunkt für jede Modifikation ein anderer ist [2]). Wäre die alte Theorie der Polymorphie richtig, so müßte also jede Änderung des Raumgitters eine Änderung der Löslichkeit bedingen und da man eine solche beim Verbiegen plastischer Kristalle nicht beobachtet, könnte die Plastizität nur eine scheinbare, auf Zertrümmerung und Wiederverschweißung der Trümmer unter Erhaltung des Raumgitters beruhende sein. Bei flüssigen Kristallen wäre eine Zertrümmerung ausgeschlossen, sie könnten also schon aus diesem Grunde nicht existieren. Es wäre aber auch

1) Auszug aus meiner zusammenfassenden Abhandlung: „Die Lehre von den flüssigen Kristallen und ihre Bedeutung für die Biologie" in der Zeitschrift „Ergebnisse der Physiologie" von L. Asher u. K. Spiro **16**, 255, 1917 (254 Seiten mit 572 Abbildungen im Text), welche auch als Sonderabdruck bei J. F. Bergmann, Verlagsbuchhandlung in Wiesbaden zu haben ist. Eine nach dieser Abhandlung geordnete Sammlung von Lichtbildern und Kinematographenfilms ist (nach dem Kriege) zu beziehen von der Firma Ernemann-Werke A.-G. Dresden A., Schandauer Str. 48/52.

2) Wenn bei den nachfolgenden Zitaten kein Name genannt ist, so ist gemeint, daß es sich um eine meiner eigenen Veröffentlichungen handelt. Zeitschr. f. Kristallogr. **1**, 97, 1877; Molekularphysik, Leipzig **1**, 683, 1888; **2**, 399, 1889; Flüssige Kristalle 1904, 200; J. Frick u. O. Lehmann, Phys. Technik II (2) 1319, 1909; Zeitschr. f. phys. Chem. **71**, 355, 1910; Die neue Welt der flüssigen Kristalle, Leipzig 1911, 89.

3) Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 462, 1889; Wied. Ann. **40**, 401, 1890; Ann. d. Phys. **25**, 852, 1908; **27**, 1044, 1908; diese Zeitschr. **15**, 617, 1914.

1) Die Ansicht, welche man zuerst auf Grund dieser Untersuchungen aufgestellt hat, die Kristalle seien große chemische Moleküle — ich habe sie als „Atomgruppierungstheorie" von der gewöhnlichen unterschieden — ist mit der Existenz der flüssigen Kristalle ebenfalls nicht vereinbar. Wahrscheinlich liegen die Moleküle in Kristallen zu nahe aneinander, als daß bei dem bis jetzt erzielten Grade der Genauigkeit eine Unterscheidung der Moleküle möglich wäre. Die Röntgenstrahleninterferenzen erfolgen so, wie wenn die Kristalle aus ineinandergestellten Raumgittern der Atome beständen. Siehe W. H. u. W. L. Bragg, Zeitschr. f. anorg. Chem. **90**, 153, 1913; P. Groth, Zeitschr. f. Kristallogr. **54**, 65, 1914; W. L. Bragg, *X*-rays and crystal structure 1915; P. Niggli, K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1915, 6. Ser.; M. Born, Dynamik der Raumgitter, Leipzig 1915; F. Rinne, Zeitschr. f. anorg. Chem. **96**, 317, 1916; N. Jahrb. f. Min. 1916 (2), S. 47; Die Naturwissenschaften 1916, Nr. 17 u. 18; 1917, Nr. 4; W. Voigt, diese Zeitschr. **17**, 161, 1916; A. Johnsen, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **14**, 52, 1917; C. Runge, diese Zeitschr. **18**, 509, 1917; P. Debye u. P. Scherrer, ebenda **17**, 277, 1916; **18**, 291, 483, 1917.

2) Zeitschr. f. Kristallogr. **1**, 101, 1877; **8**, 527, 1883; Molekularphysik **2**, 151, 1888; Zeitschr. f. phys. Chem. **9**, 671, 1892; Flüssige Kristalle 1904, 159; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 86.

kein Lösungsgleichgewicht eines Kristalltropfens mit der umgebenden Mutterlauge denkbar, denn in einem solchen kann das Raumgitter an einer Stelle z. B. so gestört sein, daß hier die Molekülachsen radial angeordnet sind, die Löslichkeit also etwa größer wäre als dicht daneben, diese Stelle somit beständig aufgezehrt würde. Der Nachweis der Unrichtigkeit der Theorie der Polymorphie ist deshalb der Ausgangspunkt der Lehre von den flüssigen Kristallen.

1. Polymorphe Umwandlung. Kristallisations-Schubkraft.

Bei Ammoniumnitrat entdeckte ich fünf feste Modifikationen, die bei ganz bestimmten „Umwandlungstemperaturen" (— 16°; 32,4°; 82,8°; 125,6°) im einen und entgegengesetzten Sinn sich ineinander umwandeln können[1]) — ich nannte sie enantiotrope Modifikationen —, ganz ähnlich wie z. B. eine wasserreiche kristallwasserhaltige Substanz bei einer ganz bestimmten Dissoziationstemperatur in wasserärmere und Wasser zerfällt und umgekehrt beim Abkühlen die wasserärmere bei derselben Temperatur wieder in wasserreichere übergeht. Die polymorphen Modifikationen können also nicht aus denselben Molekülen in verschiedener Raumgitteranordnung bestehen, denn dann müßten die Umwandlungstemperaturen für Vor- und Rückumwandlung verschieden sein, da die Temperaturänderung jeweils zunächst eine Art molekularer Spannung erzeugen müßte, welche die durch die Umlagerung geweckte elastische Reaktionskraft übertrifft. Die polymorphen Modifikationen sind hiernach nicht verschiedene Aggregatzustände derselben Substanz, sondern molekular (physikalisch) isomere verschiedene chemische Verbindungen, wobei zu berücksichtigen ist, daß molekulare Verbindungen von atomistischen sich nur durch geringere Festigkeit unterscheiden, eine scharfe Grenze zwischen beiden also nicht existiert[2]).

Die Kräfte, welche die Parallelrichtung der Moleküle und deren Ordnung zum Raumgitter bei festen Kristallen bewirken, kann man sich vorstellen ähnlich den Richtkräften, welche Magnete aufeinander ausüben, die durch geeignete anziehende und abstoßende Zentralkräfte (etwa elektrischer Natur) in bestimmtem Abstand gehalten werden. Einfache Dipole genügen allerdings nicht, da bei deren Parallelrichtung freie Magnetismen hervortreten würden; man muß sich also die Magnete als astatische Systeme vorstellen, z. B. als polygonale Blättchen, deren Ecken abwechselnd nord- und südmagnetisch sind[1]). (Fig. 1.) Ändert sich deren Beschaffenheit durch polymorphe Umwandlung, so wird unter Umständen, da sich das Raumgitter entsprechend ändern muß, eine molekulare Schubkraft hervortreten, die auf Kosten von chemischer Energie, die sonst als Umwandlungswärme zum Vorschein käme, Bewegungsenergie erzeugt.

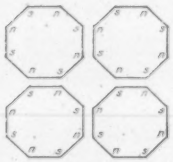


Fig. 1.

Fälle dieser Art beobachtete ich z. B. bei Protokatechusäure, Chinondihydroparadikarbonsäureester und Paraazophenetol[2]). Die stäbchenförmigen Kristalle der Protokatechusäure scheinen sich gewissermaßen zu verflüssigen, sie verziehen (Fig. 2), krümmen und zerspalten sich; in Wirklichkeit bleiben sie aber fest, und daß es sich nicht einfach um Änderung des

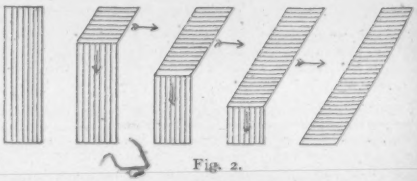


Fig. 2.

1) Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 97, 1877; Molekularphysik 1, 1888; 2, 1889; Ann. d. Phys. 8, 908, 1902; Zeitschr. f. phys. Chem. 71, 355, 1910; Das Kristallisationsmikroskop 1910, S. 20; M. Bellati und R. Romanese, Atti Ist. Ven. (6) 4, 1895, 1886; W. Schwarz, Gött. Preisschr. 1892; S. Lussana, N. Cim. (4) 1, 105, 1895; G. Tammann, Wied. Ann. 68, 640, 1899; B. Goßner, Zeitschr. f. Krist. 38, 110, 1904; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 21, 181, 1906; F. Wallerant, Compt. rend. 142, 217, 1906; U. Behn, Proc. Roy. Soc. 80, 444, 1908; M. Bellati und L. Finazzi, Atti Ist. Ven. 59, 1163, 1910; K. Vogt, diese Zeitschr. 12, 1129, 1911.

2) Molekularphysik 2, 413, 1889; A. Werner, Neuere Anschauungen a. d. Geb. d. anorg. Chem. 3. Aufl. 1913.

1) Molekularphysik 2, 393, 1889; diese Zeitschr. 10, 553, 1909; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 347 ff.; Prometheus 25, 4; 1913; Die Lehre v. d. flüss. Krist. 1917, 290. Siehe auch E. Riecke, Ann. d. Phys. 3, 345, 1900; J. Beckenkamp, Sitzber. d. phys. med. Ges. Würzb. 1911, 112; Stat. u. kin. Kristalltheorien 1913 u. 1915; Centr. f. Min. 1917, Nr. 5, 97; Kinet. Atomtheorie 1917; J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12, 280, 1915; Atomdynamik 1915; M. Born, Berl. Akad. 30, 614, 1916.

2) Wied. Ann. 25, 173, 1885; Ann. d. Phys. 21, 384, 1906.

Raumgitters handelt, geht daraus hervor, daß sich mit der Form auch die Löslichkeit ändert, denn nicht umgewandelte Teile werden allmählich von umgewandelten unter Hofbildung aufgezehrt.

Die Verschiedenheit der Moleküle der Schmelze von der der festen Modifikationen folgt daraus, daß zwei verschiedene polymorphe Modifikationen (z. B. rhombischer und monokliner Schwefel) unmöglich, wie es tatsächlich der Fall ist, dieselbe Schmelze geben könnten, wenn das Schmelzen nur in einem Auseinanderrücken der Moleküle bestände, weil ihre Moleküle verschieden sind. Gleiches gilt für die Verdampfung; der Dampf der beiden Modifikationen ist derselbe, seine Moleküle können also weder die der einen, noch die der andern Modifikation sein.

Unter Vermittlung des Dampfes vermag die stabile Modifikation die labile aufzuzehren, somit müssen beide darin gelöst sein. Tröpfchen der Schmelze werden ebenso von festen Kristallen aufgezehrt, der Dampf muß somit auch Flüssigkeitsmoleküle enthalten. Der Kondensationspunkt ist offenbar der Sättigungspunkt der Lösung; übersättigter Dampf ist eine gasförmige übersättigte Lösung. Ebenso ist der Erstarrungspunkt als Kristallisationspunkt oder Sättigungspunkt der Lösung der betr. festen Modifikation in der Schmelze aufzufassen; überkühlte Schmelze ist übersättigte Lösung. Amorphe (glasartige) Stoffe, die sich durch starke Überkühlung bilden, sind somit stets Gemische von mindestens zwei verschiedenen Molekülarten. Darum können sie nicht wachsen wie Kristalle, sie sind keine Phasen, ihre Lösungen besitzen keinen Sättigungspunkt, ihre Schmelzen keinen bestimmten Erstarrungspunkt[1]). Die Schmelzwärme ist im wesentlichen Dissoziationswärme; beim Erweichen amorpher Körper verteilt sie sich auf ein größeres Temperaturgebiet.

In der Lösung besteht Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Molekülarten. Scheiden sich Kristalle aus, so bilden sich an Stelle der hierdurch entzogenen festen Moleküle sofort wieder neue, so daß das Mengenverhältnis dasselbe bleibt[2]). Auch die Umwandlungstemperaturen fester polymorpher Modifikationen können als Sättigungs- oder Lösungstemperaturen aufgefaßt werden[3]), freilich nicht nach der alten Theorie der Aggregatzustände, nach welcher nur isomorphe Stoffe Mischkristalle bilden könnten, während polymorphe Modifikationen naturgemäß nicht isomorph sind (nicht in derselben Kristallform kristallisieren), so daß notwendig eine Störung des Raumgitters die Folge sein müßte, die aber der Theorie gemäß unmöglich ist.

2. Anomale Mischkristalle und Raumgitterstörung.

Meine Versuche ergaben, daß auch diese Theorie der Isomorphie nicht haltbar ist; ich konnte z. B. künstliche Färbungen von Kristallen erhalten unter Umständen, bei welchen eine Aufnahme des Farbstoffs in Form feiner Einschlüsse (wie man sie z. B. bei Sénarmonts künstlich gefärbten Kristallen annahm) ausgeschlossen war, weil sich die Kristalle unter Hofbildung weit dunkler färbten als die umgebende Lösung[1]) (z. B. Salmiak mit Eisenchlorid, Fig. 3), und zwar dichroitisch entsprechend regelmäßig orientierter Aufnahme; weil sich ferner der Einfluß des Zusatzes auch äußerte durch Verminderung der Wachstumsgeschwindigkeit (Annäherung an das Verhalten amorpher Körper, die immer Gemische sind), der Löslichkeit und der Größe der einzelnen Individuen; durch ungleichmäßiges Wachstum an verschiedenen Stellen, Krümmung bis zur Ringbildung und schraubenförmigen Verdrillung, Aufreißen, Verzweigung, Zerfaserung, Aufblätterung und Übergang der Kristalle in Sphärokristalle. Dabei zeigten selbst zu sehr engen Ringen gebogene Kristalle zwischen gekreuzten Nicols keinerlei Unstetigkeiten, sondern gleichmäßig tangentialen bzw. radialen Verlauf der Auslöschungsrichtungen (Fig. 4), wie es bei stetiger Störung der Raumgitterstruktur zu erwarten war[2]). Walle-

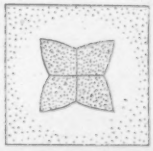


Fig. 3.

2) Zeitschr. f. Kristallogr. 18, 457, 1890.
2) Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 97, 1877; Ann. d. Phys. 47, 832, 1915.
3) Die neue Welt d. fl. Krist. 150 u. 248, 1911.

1) Zeitschr. f. Kristallogr. 8, 473, 1883; Zeitschr. f. phys. Chem. 1, 15, 1887; 8, 543, 1891; Wied. Ann. 51, 47, 1894; N. Jahrb. f. Mineral. (2) 109, 1915; Ann. d. Phys. 47, 832, 1915; J. Retgers, Zeitschr. f. phys. Chem. 12, 621, 1893; J. H. van t'Hoff, ebenda 5, 325, 1890; W. Nernst, ebenda 6, 577, 1890.
2) Progr. Mittelschule Mülhausen i. E. 1877, 10, Fig. 8; Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 479, 1877; 10. 7, 1885, Taf. I, Fig. 39; 18, 459, 1890, Fig. 1—5; Flüssige Kristalle 123, 1904.

rant[1]) beobachtete weiterhin Sphärokristalle mit schraubenförmig verdrehten Fasern speziell bei Zumischung optisch aktiver Stoffe. Die Möglichkeit der Störung der Raumgitteranordnung der Moleküle ist durch diese Tatsachen zweifellos festgestellt, doch war die Frage, ob auch bei völlig reinen Kristallen lediglich durch mechanische Einwirkung eine Störung hervorgebracht werden kann, auch durch diese Versuche noch nicht entschieden.

3. Plastische feste Kristalle. Konstanz ihrer Eigenschaften.

Stellt man sich die Kristalle als regelmäßige Aggregate astatischer Magnetsysteme (Fig. 1) vor, die durch abstoßende und anziehende (elektrische?) Kräfte in bestimmten mittleren Abständen gehalten werden[2]), so erscheint verständlich, daß Deformation eine elastische Kraft wecken muß, die den früheren Zustand wiederherzustellen sucht. Plastische Deformation würde nun erfordern, daß ein verbogener eingezwängter Kristall allmählich seine elastische Spannung verliert, daß Relaxation eintritt, so daß der Kristall bei Beseitigung des Zwangs seine frühere Form nicht mehr völlig annimmt. Vielleicht beruht dies darauf, daß die thermische Bewegung bald da bald dort kleine Lagenänderungen der Moleküle im Sinne einer Verminderung der Spannung hervorbringt, welche nicht mehr zurückgehen können; die verschwindende Spannungsenergie würde dabei als Wärme der inneren Reibung wieder zum Vorschein kommen.

Jedenfalls gelang es mir, Kristalle von Ammoniumnitrat zu engen Ringen zu biegen unbeschadet ihrer Durchsichtigkeit und ohne die geringste Änderung ihrer Löslichkeit, die sich beim Einlegen in gesättigte Lösung durch Aufzehren einzelner Stellen durch andere hätte zu erkennen geben müssen. Die Untersuchung zwischen gekreuzten Nicols ergab, daß die Molekülachsen, wie erwartet, ihre Lagen relativ zu den nun gebogenen Kanten bewahrt hatten (Fig. 4) entsprechend gleichmäßiger Störung des Raumgitters[1]). Die Existenz flüssiger Kristalle ist somit nicht, wie die Identitätstheorie annahm (s. oben), von vornherein ausgeschlossen.

Fig. 4.

4. Die zähflüssigen Kristalle. Fächerstruktur.

Bei Untersuchung der Polymorphie von Ammoniumnitrat fiel mir auf, daß die kurz vor dem Schmelzen erscheinende regulär kristallisierende Modifikation so plastisch ist, daß die Existenz einer Elastizitätsgrenze, somit die Berechtigung, die Kristalle als „fest" zu bezeichnen, bezweifelt werden kann. Die Entscheidung, welche etwa durch Torsion einer Platte mit aufgezeichneten Radien herbeigeführt werden könnte[2]), stieß leider auf technische Schwierigkeiten. Auch bezüglich der regulären Kristalle des Jodsilbers geriet ich in Zweifel, ob sie als feste oder als zähflüssige Kristalle zu bezeichnen seien[3]). Bei den jedenfalls nicht festen, sondern zähflüssigen Kristallen des sauren Ammoniumoleathydrats[4]) zeigt sich zwischen gekreuzten Nicols eine eigentümliche Fächerstruktur, die an diejenige der Sphärokristalle erinnert, also wahrscheinlich durch geringe Verunreinigung vielleicht mit gewöhnlichem Ammoniumoleathydrat bedingt ist und starke Raumgitterstörung bedeutet[5]).

5. Die schleimig-flüssigen Kristalle. Gestaltungskraft.

Kristalle von schleimig-flüssiger Konsistenz fand ich schließlich bei dem normalen Ammoniumoleathydrat[6]). Sie unterschieden sich

1) F. Wallerant, Compt. rend. **143**, 555, 1169, 1906; P. Gaubert, ebenda **153**, 683, 1911; **156**, 1161, 1913.

2) Diese Zeitschr. **10**, 533, 1909; Die neue Welt d. fl. Krist. 343, 356, Fig. 231, 1911; Prometheus **25**, 1, 1913.

1) Zeitschr. f. Kristallogr. **1**, 110, 1877; Molekularphysik **1**, 64, 1888; Ann. d. Phys. **50**, 576, 1916. (Hier ist auch die gesamte Literatur über Plastizität der Kristalle angegeben.)

2) Flüssige Kristalle 1904, 91 Fig. 502; Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 413, 1913, Fig. 1.

3) G. F. Rodwell, Chem. News **30**, 289, 1874; Proc. Roy. Soc. Lond. **25**, 287, 1876/77; Phil. Trans. Lond. **173**, 1137, 1882; O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. **1**, 120, 492 Anm., 1877; Wied. Ann. **24**, Taf. I, Fig. 27, 1885; **38**, 400, Anm. 2, 1889; Molekularphysik **1**, 826, 848, 1888; Die neue Welt d. fl. Krist. 165, 1911.

4) Flüssige Kristalle 1904, S. 21, Taf. 1 u. 2; Zeitschr. f. Kristallogr. **52**, 592, 1913; diese Zeitschr. **17**, 250, Fig. 33, 1916; Die Lehre von d. fl. Krist. 1917, 274, Fig. 16.

5) Weiter gehört zu den zähflüssigen Kristallen das wasserärmere Hydrat der 10-Bromphenanthren- 3 oder 6-sulfosäure, siehe H. Sandqvist, Kolloidzeitschr. **19**, 113, 1916; O. Lehmann, Ann. d. Phys. **50**, 599, 1916.

6) Zeitschr. f. phys. Chem. **18**, 91, 1895; Wied. Ann. **56**, 771, 1895; diese Zeitschr. **7**, 722, 789, 1906; Sitzb. d. Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22; 1912 Nr. 13; 1913 Nr 13; Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 443, 1914; Ann. d. Phys. **48**, 725, 1915.

von festen Kristallen sehr auffallend dadurch, daß beim Zerteilen in kleine Stücke (z. B. durch Vorbeiströmen an Hindernissen), welche in einer indifferenten Flüssigkeit schwebend erhalten wurden, jedes Stück alsbald wieder seine normale Form annahm (Fig. 5), ähnlich wie ein freischwebender Tropfen sich beim Zerreißen in kleine genau kugelförmige Tröpf-

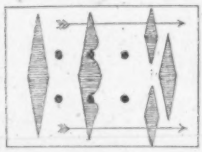


Fig. 5.

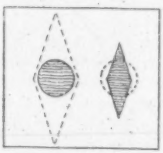


Fig. 6.

chen zerteilt. Würde man eine Kugel aus einem solchen Kristall ausschneiden, so würde sie demgemäß freischwebend sofort von selbst Polyederform annehmen (Fig. 6). Mit dem Vorhandensein vollkommener Elastizität, welche die Deformation der Kugel hindern müßte, d. h. mit der Existenz einer Elastizitätsgrenze, dem Kennzeichen des festen Zustandes, ist dieses Verhalten nicht verträglich, somit müssen die Kristalle notwendig als „flüssige" bezeichnet werden, eine beliebige Menge solchen Stoffes als „kristallinische Flüssigkeit".

Die Kraft, welche die Gestaltung bewirkt, kann nicht Elastizität sein, ihre Natur ist nicht näher bekannt und deshalb gab ich ihr den Namen „Gestaltungskraft"[1]). Vielleicht ist sie einfach Folge der durch die stäbchen-[2]) oder blättchenförmige[3]) Gestalt der Moleküle und durch deren Parallelrichtung bedingten Anisotropie der thermischen Bewegung, wodurch das Oberflächenhäutchen, dessen Spannung unabhängig von der Molekularanordnung ist [wie die wesentlichen Eigenschaften des Kristalls überhaupt (z. B. die Löslichkeit)] an jeder Stelle in anderer Weise hervorgetrieben wird, nämlich soweit, bis der geweckte kapillare Gegendruck den Überschuß der Expansivkraft kompensiert. Vielleicht wirkt aber noch Richtkraftoberflächenspannung[4]) mit.

1) Ann. d. Phys. **17**, 728, 1905; Verh. d. D. phys. Ges. **8**, 331, 1906; diese Zeitschr. **7**, 722, 789, 1906; Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 443, 1914; Ann. d. Phys. **48**, 182, 1915.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. **18**, 95, 1895; Ann. d. Phys. **12**, 319, 1903; Verh. d. D. phys. Ges. **8**, 143, 331, 1906; diese Zeitschr. **7**, 725, 1906; Die scheinb. lebenden Krist. 26, 1911.

3) Diese Zeitschr. **14**, 1131, Fig. 1; 1133, Fig. 3a, b, 1913; Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 420, 1913; diese Zeitschr. **15**, 620, 1914.

4) Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 443, 1914; Ann. d. Phys. **48**, 764, 1915.

6. Bildung halbisotroper Kristalle durch Zusammenfließen.

In Berührung gebracht fließen solche schleimig-flüssigen Kristalle zu einheitlichen Kristallen zusammen (Fig. 7), ebenso wie zwei Flüssigkeitstropfen zu einem einheitlichen Flüssigkeitstropfen. Die Parallelrichtung der Moleküle, welche nach beliebiger Verzerrung oder beim Zusammenfließen ungeachtet der regellosen thermischen Bewegung sich sofort wieder herstellt, nannte ich „spontane Homöotropie", die Kräftepaare, welche dabei auf die Moleküle wirken, „molekulare Richtkraft".

Anordnung in den Ecken eines Raumgitters, welche die Polyederform fester Kristalle bedingt, findet höchstens bei den allerkleinsten flüssigen Kriställchen statt. Auch die Parallelrichtung der Moleküle ist keine vollkommene, denn bei größeren Individuen ist der Querschnitt immer kreisförmig, die Form also zylindrisch, konisch, ellipsoidisch usw. (Fig. 8).

Fig. 7.

Fig. 8.

Sind die Moleküle polygonale Blättchen, deren Fläche senkrecht zur Längsrichtung der Kristalle ist, worauf aus der verschiedenen Art des Zusammenfließens je nach der gegenseitigen Lage der Kristalle geschlossen werden kann[1]), so muß man sich vorstellen, daß wohl ihre Flächen parallel sind, also auch deren Normalen, die Hauptachsen, daß dagegen die Kanten, die Nebenachsen, beständig wechselnde regellose Richtung haben. Ich nannte eine derartige Struktur zum Unterschied von der Raumgitterstruktur „halbisotrope Struktur"[2]).

7. Bewegung durch Parallelrichtung beim Zusammenfließen.

Die Gestaltungskraft bewirkt auch die Parallelrichtung verschieden orientierter Kristalle nach Herstellung der Berührung oder während des Zusammenfließens[3]) (Fig. 7). Die

1) Diese Zeitschr. **14**, 1133, 1913; **15**, 620, 1914.

2) Ann. d. Phys. **12**, 311, 1903; Sitzb. d. Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 2, Fig. 4—15; 1912, Nr. 13, Taf. 1; diese Zeitschr. **15**, 618, 619, 1914; Ann. d. Phys. **48**, 725, 1915.

3) Ann. d. Phys. **48**, 738, Taf. 4, Fig. 1, 1915.

lebhaften Bewegungsvorgänge bei Anhäufungen flüssiger Kristalle, wobei diese gewissermaßen im Kampf miteinander begriffen zu sein scheinen, derart, daß schließlich der stärkere den schwächeren sich einverleibt, sind Folge dieser Parallelrichtung oder auch von Aufrichtung am Glase.

8. Anschmiegung und Aufrichtung an Glasflächen.

Mit Glasflächen in Berührung kommende flüssige Kristalle zerfließen auf dem Glase so, daß die Hauptachse der Moleküle senkrecht zum Glase wird, d. h. die Molekülblättchen

Fig. 9.

schmiegen sich dem Glase an und schräg stehende Kristalle drehen sich senkrecht zu diesem[1]) (Fig. 9).

9. Anschmiegung in Röhren, Tropfen und an Blasen.

Scheidet sich Ammoniumoleathydrat in engen Kapillaren aus alkoholischer Lösung aus, so entstehen infolge von Anschmiegung kristallinische Flüssigkeitssäulen, in welchen die optische Achse überall radial gerichtet ist[2]).

Durch Ausscheidung im Innern von Tropfen oder an der Außenseite von Luftblasen entstehen aus gleichem Grunde hohle flüssige Sphärokristalle, die sich auch zu flüssig-kristallinischen Schäumen vereinigen können[3]). Auch die ebene Oberfläche einer nicht bedeckten Lösung überzieht sich mit einer homogenen halbisotropen Haut.

1) Wied. Ann. 56, 786, 1895; Zeitschr. f. phys. Chem. 18, 95, 1895; Ann. d. Phys. 12, 332, 1903; 19, 410, 1906; diese Zeitschr. 7, 579, 1906; Ber. d. D. chem. Ges. 41, 3782, Anm., 1908; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 16; 1913, Nr. 13, 15, Anm. 28; diese Zeitschr. 17, 241 Anm., 1916; F. Wallerant, Compt. rend. 143, 694, 1906; D. Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chem. 61, 166, 1908; 85, 701, 1913; Nova acta, Halle 1909; D. Vorländer u. W. Kasten, Ber. d. D. chem. Ges. 31, 2033, 1908.

2) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 17, Taf. 2, Fig. 16—20, Taf. 3, Fig. 17 u. 18.

3) Verh. d. D. phys. Ges. 10, 321, 407, 1908; Ann. d. Phys. 43, 125; 44, 975, 1914; Heidelb. Akad. 1913, Nr. 13, 22; Zeitschr. f. Kristallogr. 52, 600, 1913; Ch. P. White, Medical Chronicle, March 1908.

10. Einfache und doppelte konische Strukturstörungen.

Sind die Kristalle hemimorph, z. B. am einen Ende spitz, am andern stumpf, so bilden sich beim Zusammenfließen in verkehrter Lage eigentümliche Störungen der Struktur aus. Die Hauptachsen (optischen Achsen) der Moleküle sind nicht mehr parallel, sondern liegen auf konaxialen Kegelflächen mit gemeinsamer Basis[1]). Liegen solche Störungen im Innern, so sind die Kegel ganze Doppelkegel (Fig. 10a). Liegt die Achse auf der Oberfläche, so fehlt die Hälfte, es sind halbe doppelkonische Störungen (Fig. 10b). Liegt

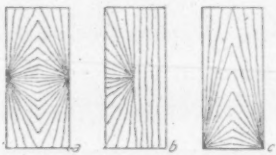


Fig. 10a, b, c.

die Basis auf der Oberfläche, so sind es einfache konische Störungen (Fig. 10c).

11. Systeme konischer Störungen, Polygonsysteme.

Die Trübung zusammenhängender Massen ist nicht wie die fester kristallinischer Körper dadurch bedingt, daß verschieden orientierte Individuen aneinandergrenzen, sondern durch zahlreiche, regellos orientierte konische Störungen. Solche können sich aber auch zu regelmäßigen, z. B. quadratischen, Systemen aneinanderreihen. Dabei erscheinen die Kegelspitzen durch Polygonsysteme verbunden, d. h.

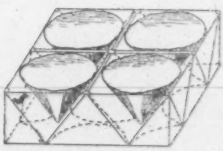


Fig. 11.

1) Wied. Ann. 56, 786, Fig. 13a, Fig. 20—22b, 1895; Flüssige Kristalle 1904, 39, Fig. 40—51; 40, Fig. 52—67, Taf. 3—5 u. 10—35; 41, Fig. 68—73; Ann. d. Phys. 12, 329, 1903; 19, 22, 408, Fig. 1—12, 26, 29, 20 usw.; 20, 63, 1906; Die scheinbar leb. Krist. 1907, 28, Fig. 29 u. 30; 34, Fig. 46; 57, Fig. 103—108; Verh. d. D. phys. Ges. 13, 338, 1911; 15, 413, 1913; Ann. d. Phys. 35, 193, 203, 1911; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 368; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 24, Taf. 5; 1912, Nr. 13, 368, Taf. 1; Ann. d. Phys. 48, 725, 739, 1915.

durch gerade Linien, in welchen Molekülreihen von verschiedener Richtung zusammenstoßen (Fig. 11). Stets sind die Molekülreihen (falls Gleichgewicht eingetreten ist) gerade, gleichgültig, ob sie parallel sind oder Fächerstrukturen bilden wie bei den konischen Störungen oder in den Gebieten zwischen den Kegeln[1]).

12. Erzwungen homogene schleimig-flüssige Kristalle.

Erzeugt man schleimig-flüssige Kristalle von Paraazoxybenzoesäureäthylester durch Erhitzen einer festen kristallinischen Schicht, welche zwischen Glasplatten erstarrt war, so bleiben bei der Umwandlung die gebildeten flüssig-kristallinischen Moleküle in der Stellung, in der sie sich aus den festen gebildet hatten, am Glase haften. Nach diesen fixierten Molekülen richten sich die übrigen, so daß erzwungen homogene flüssig-kristallinische Schichten entstehen, die sich optisch ganz wie feste Kristalle verhalten, obschon die Moleküle wahrscheinlich kein Raumgitter bilden, sondern nur parallel sind[2]).

Beim Erhitzen bis zu teilweiser Ablösung vom Glase bilden sich konische Störungen, deren Achsen im allgemeinen schief zum Glase sind (Fig. 12), da ihre Lage durch die Orientierung der Schicht bedingt wird. Es können sich auch Systeme mit zwei oder drei zueinander senkrechten Achsen bilden[3]).

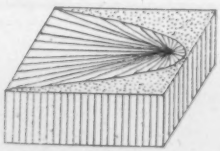


Fig. 12.

13. Glatte und kettenförmige ölige Streifen, Perlen.

An den Rändern angeschmiegter Schichten sieht man häufig halbe einfache Störungen von gleicher Größe (Fig. 13), eventuell regelmäßig abwechselnd mit solchen von umgekehrter Lage (Fig. 14) auftreten. Bei Vergrößerung oder Verkleinerung des Umfangs ändert sich die Zahl solcher Perlen sprungweise derart daß immer alle gleiche Größe behalten, auch können alle zusammen oder nur einzelne derselben sich zu glatten Streifen vereinigen (Fig. 15). Beim Zusammenfließen mehrerer Schichten können aus kettenartig verbundenen konischen Störungen oder glatten Streifen sog. „ölige Streifen" von entsprechender Struktur entstehen. Beim Zusammenfließen halbisotroper Kristalle entstehen in gleicher Weise ringsumlaufende Ketten, sog. „Perlen", von welchen den Kegelachsen entsprechend nach beiden Seiten eine Streifung ausgeht[1]).

Fig. 13.

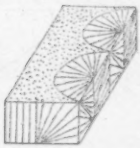


Fig. 14.

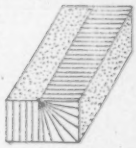


Fig. 15.

14. Zwillinge flüssiger Kristalle und Umklappen.

Beim Zusammenfließen flüssiger Kristalle unter bestimmten Winkel können flüssige Zwillinge (Fig. 16) entstehen[2]), doch tritt gewöhnlich an der Zwillingsebene eine konische Störung auf (Fig. 17). Nach einiger Zeit klappen die Zwillinge öfters zu einfachen Kristallen zusammen, umgekehrt kann aber auch aus

Fig. 16.

Fig. 17.

1) Ann. d. Phys. **12**, 332, 1903; **48**, 745, 1915; Flüssige Kristalle 46, 1904; Die Lehre v. d. fl. Krist. 316, 1917; G. Friedel u. F. Grandjean, Bull. soc. min. **33**, 300, 1910 (Dez.); Compt. rend. **151**, 327, 442, 988, 1910.

2) Ann. d. Phys. **12**, 325, 1903; Flüssige Kristalle 51, 1904.

3) Flüssige Kristalle 1904, Taf. 5; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 201, Anm. 3; Ann. d. Phys. **48**, 750, 1915; Die Lehre v. d. fl. Krist. 320, 1917.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 462, 1889; Flüssige Kristalle 1914, Taf. 9; Ann. d. Phys. **35**, 211, 1911; **48**, 740, 1915; diese Zeitschr. **17**, 241, 1916; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 40b; 1912, Nr. 13, Taf. 2, Fig. 34 u. 35, Taf. 4, Fig. 72.

2) Wied. Ann. **56**, 771, 1895; Zeitschr. f. phys. Chem. **18**, 91, 1895; Flüssige Kristalle 39, 1904; Ann. d. Phys. **19**, 409, Fig. 26, 1906; **35**, 211, 1911; **48**, 760, 1915; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, S. 17, Taf. 1, Fig. 16b; Arch. sc. phys. et nat. **32**, 10, Taf. 1, Fig. 5, 1911; Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 413, 1913; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 1, Fig. 16, 52, 53.

einem einfachen Kristall von selbst durch Zusammenklappen ein Zwilling entstehen [1]).

15. Biegung, Drillung und Knickung flüssiger Kristalle.

Beim Biegen oder Drillen schleimig-flüssiger Kristalle treten immer so viele konische Störungen auf, daß trotz der Änderung der Gestalt alle Molekulreihen gerade gestreckt bleiben. Auch zwillingsartige Knickungen kommen vor, namentlich bei öligen Streifen [2]), wobei sich unter Umständen regelmäßig-polygonale Netze bilden. Bei angeschmiegten Schichten wurde Verzerrung des Ringsystems im konvergenten Licht infolge von Knickung festgestellt [3]).

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 462, 1889; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 2, Fig. 19; Taf. 3, Fig. 55; Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 413, 1913; Ann. d. Phys. **48**, 759, 1915.

2) Molekularphysik **1**, 825, 1888; **2**, 222, 1889; diese Zeitschr. **7**, 578, 1906; Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 447, 1914.

3) Diese Zeitschr. **11**, 581, 1910; Die neue Welt d. fl. Krist. 197, 233, 1911; D. Vorländer u. H. Hauswaldt, Acta nova, Halle **90**, 107, 1909; Zeitschr. f. phys. Chem. **61**, 1907; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. **31**, 2042, 1908.

(Fortsetzung folgt.)

Berichtigung.

In der Notiz K. Federhofers auf Seite 560 des 18. Jahrganges soll es in der letzten Zeile anstatt Maximum Minimum heißen.

Tagesereignisse.

Ein Deutsches Erfindungsinstitut. Eine gemeinnützige Organisation der Erfindertätigkeit in Deutschland ist das Ziel einer Gesellschaft, die in Gießen begründet wurde.

Auf Grund zahlreicher Anregungen, die in der „Umschau", Wochenschrift über die Fortschritte in Wissenschaft und Technik (Frankfurt a. M.), erschienen, wurde folgendes Programm aufgestellt:

Das Deutsche Erfindungsinstitut bezweckt die Förderung deutscher technisch-schöpferischer Arbeit durch Auslese und Förderung erfinderisch begabter Persönlichkeiten, sowie durch Unterstützung brauchbarer Erfindungen durch Geldmittel, technische und Rechtsberatung, ferner durch die Weiterleitung der Erfindungen an Heer und Marine, Industrie und Gewerbe.

Dieses Ziel soll durch folgende Mittel angestrebt werden:

1. Einrichtung einer Vorprüfung der Erfindungen unter dem Gesichtspunkte des technischen Fortschrittes und der wirtschaftlichen Verwertbarkeit.
2. Förderung brauchbarer Erfindungen durch Rechtsschutz, technische Durchbildung und Weiterleitung an Heer und Marine, Industrie und Gewerbe; Anregung und Bildung von Studiengesellschaften.
3. Sammlung und Sichtung von Erfindungsaufgaben und deren Förderung durch Bekanntgabe, Preisausschreiben usw.
4. Förderung begabter Erfinder durch Geldbeihilfen, z. B. für Ausbildungszwecke und Studienreisen, sowie Vermittlung eines geeigneten Wirkungskreises.
5. Mitarbeit an der Ausbildung des gewerblichen Rechtsschutzes.
6. Event. Herausgabe eines Instituts-Organes mit Berichten über neue Aufgaben und Fortschritte der Technik.

Die neugegründete Gesellschaft will die Vorbereitungen zur Errichtung dieser Organisation treffen. Nähere Auskunft erteilen der Vorsitzende Geheimrat Prof. Dr. Sommer (Gießen) sowie die stellvertretenden Vorsitzenden Prof. Dr. Bechhold (Frankfurt a. M.-Niederrad), Prof. Dr. S. v. Kapff (Berlin W., Viktoria-Luise-Platz Nr. 8) und der Schriftführer Zivilingenieur Jacobi-Siesmeyer (Frankfurt a. M., Battonstr. 4).

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München Dr. Peter Paul Ewald für theoretische Physik, an der Technischen Hochschule Lemberg Professor Dr. Arnold Bolland von der Handelsakademie in Krakau für Mikrochemie.

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher der Deutschen Seewarte in Hamburg Professor Stürtz zum Vorstand des Observatoriums in Wilhelmshaven, der wissenschaftliche Assistent am Chemischen Staatslaboratorium in Hamburg Dr. F. Gillmeister und der Laboratoriumsvorstand an der Universität Heidelberg Chemiker Dr. Eberhard Müller zum Professor, der o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Otto Hönigschmid zum a. o. Professor für analytische Chemie an der Universität München, Professor Dr. Grillier vom Technikum in Biel zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Bern, die Privatdozenten Dr. Moritz Kohn an der Universität Wien (organische Chemie), Dr. Tibor Széki an der Universität Klausenburg (zyklische Kohlenmischungen) und Dr. techn. Rudolf Vondrácek von der Böhmischen Technischen Hochschule Brünn zu a. o. Professoren, der bisherige Privatdozent Professor Dr. Erich Waetzmann zum a. o. Professor und Abteilungsvorsteher am Physikalischen Institut der Universität Breslau.

Verliehen: Dem ord. Honorarprofessor der Astronomie an der Universität Erlangen und Direktor der Remeis-Sternwarte in Bamberg Dr. Ernst Hartwig der Titel Geheimer Hofrat, dem wissenschaftlichen Hilfsarbeiter am chemischen Universitätslaboratorium in Heidelberg Dr. Joh. Rissom und dem Privatdozenten für Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Richard Courant der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor für physiologische Chemie an der Universität Budapest Hofrat Dr. Franz Tangl, der ord. Professor für Arithmetik und Geometrie an der landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Geh. Reg.-Rat Dr. Otto Reichel, der frühere ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Max v. Kraft, der Professor für Agrikulturchemie an der Universität Göttingen Geh. Reg.-Rat Dr. Bernhard Tollens.

Angebote.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, der sich der drahtlosen Telegraphie zu widmen beabsichtigt oder bereits Erfahrungen auf diesem Gebiete besitzt, gesucht. Erwünscht sind Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik.

Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik funkentelegraphischer Apparate
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

◆ ◆ Verlag von S. HIRZEL in Leipzig. ◆ ◆

Das Erdöl,

seine Physik, Chemie, Geologie, Technologie und sein Wirtschaftsbetrieb

In fünf Bänden

mit anderen herausgegeben von

C. Engler und **H. v. Höfer**

o. ö. Prof. an der Techn. Hochschule zu Karlsruhe — o. ö. Prof. i. R. der Montanistischen Hochschule zu Leoben

Bisher erschienen:

Band I.

Die Chemie und Physik des Erdöls

Unter Mitwirkung von Dr. J. Berlinerblau, Prof. Dr. W. Ebstein, Dipl.-Ing. Dr. N. Hviid, Dr. H. Köhler u. Prof. Dr. L. Ubbelohde

bearbeitet von

Carl Engler

Wirkl. Geh. Rat und Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe

XX u. 856 Seit. m. 45 Abbild. u. einem Tabellenanhang in Sonderband.

Preis geheftet M. 50.—, gebunden in Halbfranz M. 62.—

Band II.

Die Geologie, Gewinnung und der Transport des Erdöls

In Gemeinschaft mit anderen bearbeitet von

K. K. Hofrat **Hans v. Höfer**

XX u. 967 Seiten. Mit 307 Abbildungen und 26 Tafeln

Preis geheftet M. 46.—, gebunden in Halbfranz M. 52.—

Band III.

Die Technologie des Erdöls und seiner Produkte

Unter Mitwirkung von Prof. Dr. H. Kast, Dr. C. F. Lossen und Fabrikdirektor R. A. Wischin

bearbeitet von

Dr. Leopold Singer

Direktor der Mineralölraffinerie Pardubitz

XVI u. 1244 Seiten. Mit 1030 Abbildgn. im Text und auf 20 Tafeln

Preis geheftet M. 56.—, gebunden in Halbfranz M. 62.—

Band IV.

Die Prüfung und Verwendung des Erdöls und seiner Produkte

von

Professor Dr. **C. Engler**, Professor Dr. **D. Holde**, Dr. **Leopold Singer**, Wirkl. Staatsrat **St. Goulischambaroff**, Dr. **S. Aisinman.**

XVI u. 778 Seiten mit 368 Abbildungen.

Preis geheftet M. 36.—, gebunden in Halbfranz M. 40.—

In Vorbereitung für Frühjahr 1918:

Band V. **Die Petroleumwirtschaft von H. Weiß.** Geschichte der Massenerschließung. Rechtliche Grundlagen des Erdölbergbaues (Berggesetzgebung). Wirtschaftliche Grundlagen (Kapital, Arbeit, Löhne), Erzeugungsstatistik, Handelsstatistik etc. etc.

Tabellen zum Englerschen Viskosimeter

von Dr. **Leo Ubbelohde** a. o. Professor für chemische Technologie und Abteilungsvorsteher am chemisch-technischen Institut der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

Preis gebunden 3 Mark.

Alle Preise exkl. 25% Teuerungszuschlag.

Inhaltsverzeichnis.

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)

Seite

Antimonlegierungen: Über die spezifischen Wärmen von Blei- —, v. R. Durrer 86
Ballistik: Lehrbuch der —, v. C. Cranz I. (B.) . . . 101
Blei-Antimonlegierungen: Über die spezifischen Wärmen von —, v. R. Durrer 86
Cranz, C., Lehrbuch der Ballistik. I. (B.) 101
Durrer, R., Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen 86
Elektrotechnik: Jahrbuch der —, v. K. Strecker. II. III. IV. (B.) 103
Flüssige Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den —, v. O. Lehmann. (Z. B.) 88
Geschwindigkeits-Verteilungs-Satz: Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen —, v. R. v. Mises . 81
Graetz, L., Die Physik. (B.) 102
Hartmann, J., Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. (B.) 104
Jahrbuch der Elektrotechnik, v. K. Strecker. II. III. IV. (B.) 103
Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen —, v. O. Lehmann. (Z. B.) 88
Kristallonomie: Franz Neumanns Beiträge zur — aus den Jahren 1823 und 1826, v. C. Neumann. (B.) 104
Lehmann, O., Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen. (Z. B.) 88
Maxwellscher Geschwindigkeits-Verteilungs-Satz: Einfache und exakte Ableitung des —, v. R. v. Mises 81
Mayer: Robert — zur Jahrhundertfeier seiner Geburt, v. J. L. Weyrauch. (B.) 104
Mises, R. v., Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes . . 81
Neumann, C., Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. (B.) . . 104
Neumann: Franz — Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826, v. C. Neumann. (B.) 104
Physik: Grundriß der —, v. L. Zehnder. (B.) . . 103
— Die —, v. L. Graetz. (B.) 102
Rowlandsches Wellenlängensystem: Tabellen für das — und das internationale Wellenlängensystem, v. J. Hartmann. (B.) 104
Spezifische Wärmen: Über die — von Blei-Antimonlegierungen, v. R. Durrer 86
Strecker, K., Jahrbuch der Elektrotechnik. II. III. IV. (B.) 103
Wärmen: Über die spezifischen — von Blei-Antimonlegierungen, v. R. Durrer 86
Wellenlängensystem: Tabellen für das Rowlandsche und das internationale —, v. J. Hartmann. (B.) . . 104
Weyrauch, J. J., Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt. (B.) 104
Zehnder, L., Grundriß der Physik. (B.) 100

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Allgemeine Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaft.

Eine Einführung in die moderne Naturphilosophie von **Dr. Bernhard Bavink.** Mit 19 Figuren und 2 Tafeln. **Preis geh. 6 M., geb. M. 8.—** exkl. Teuerungszuschlag.

Siemens & Halske A.-G.
Wernerwerk · Siemensstadt bei Berlin

Doppelspiegelgalvanometer.

Doppelspiegelgalvanometer nach Gehlhoff mit Kamera-Anbau mit elektrischer Lampe. Größe: 600 × 400 × 800 mm.